1M6 – Mardi 30 octobre 2018 Nom : .....

Géométrie I – TE n° 726A

Problème 1 (2 points)

Calculer le déterminant suivant $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$= 0 + 21 + 20 - 0 - 56 - (-18)$

$= 3$

Problème 2 (5 points)

Dans le plan muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$, considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{b}$ et $\vec{c}$. Exprimer ensuite $\vec{a}$ dans $\mathcal{B}_1 = (\vec{b}, \vec{c})$

$$\vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 2\alpha + 3\beta = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} \alpha & \beta \\ \cdot 2 & \cdot 3 \\ \cdot(-1) & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} -7\beta = 10 \\ 7\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/7 \\ \beta = -10/7 \end{cases}$$

Preuve : $\begin{pmatrix} 1/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20/7 \\ -30/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/7 \\ -28/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ok

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -10/7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

et $\vec{a} = \frac{1}{7}\vec{b} + \left(-\frac{10}{7}\right)\vec{c}$

Problème 3 (3 points)

Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Montrons que $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{c}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ -3\alpha + 8\beta = 18 \\ 2\alpha - 5\beta = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 8\beta = 24 \\ 5\beta = 15 \end{cases} \Rightarrow \beta = 3$$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 2$ et $\beta = 3$

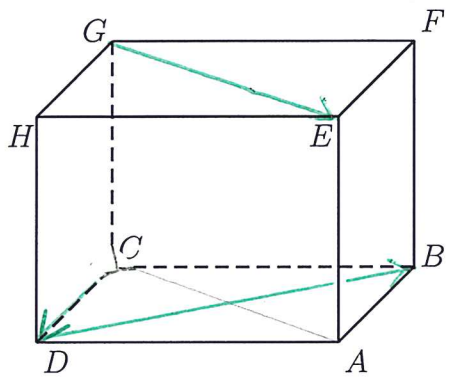
Donc $\quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{c}$

Problème 4 (4 points)

On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Déterminer si les trois vecteurs

$$\overrightarrow{GE}, \quad \overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}$$

sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur comme combinaison linéaire des deux autres. Dans le cas contraire, justifier brièvement.



Comme $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA}$, et que

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

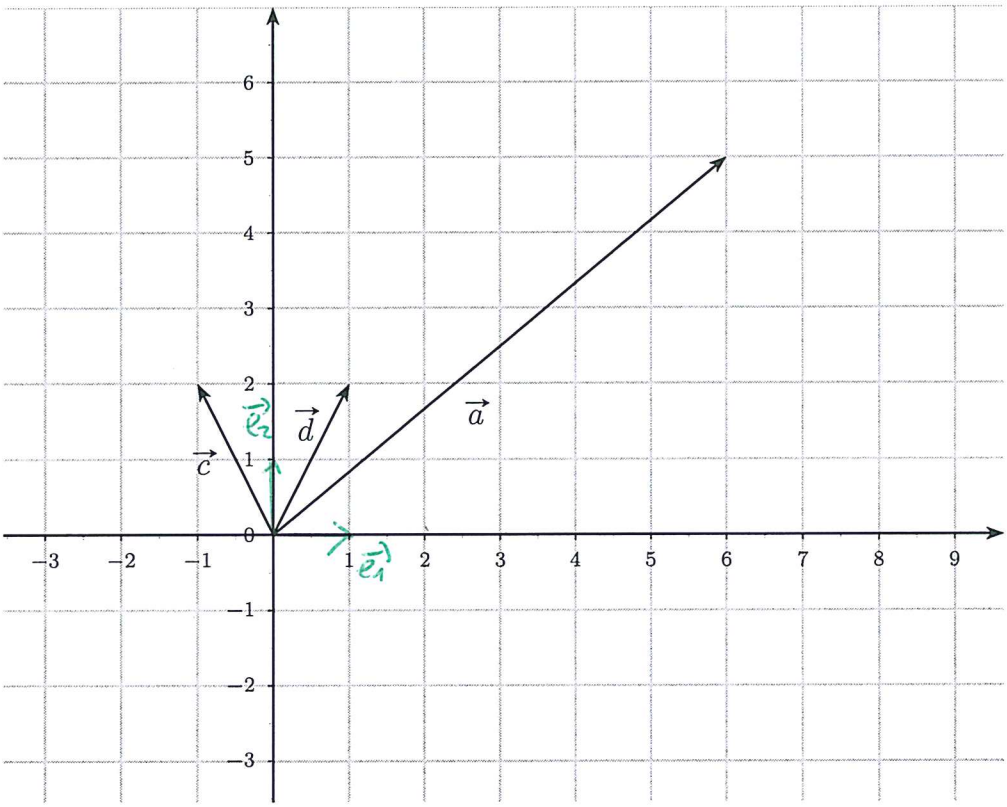
$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$

$= 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

Donc $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{CD}$

Les vecteurs sont coplanaires.

Problème 5 (4 points)



Exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \vec{c} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \\ \vec{d} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} \end{cases} \end{array} \begin{array}{c|c|c} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \\ 1 & (-1) & \\ 1 & 1 & \end{array} \begin{cases} 4\vec{e_2} = \vec{c} + \vec{d} \\ 2\vec{e_1} = -\vec{c} + \vec{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e_1} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \\ \vec{e_2} = \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 6\vec{e_1} + 5\vec{e_2} = -3\vec{c} + 3\vec{d} + \frac{5}{4}\vec{c} + \frac{5}{4}\vec{d}$$

$$= -\frac{7}{4}\vec{c} + \frac{17}{4}\vec{d}$$

Problème 6 (4 points)

Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$

b) $-(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c}$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+1 \\ -1-1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $-\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$