1M6 – Jeudi 21 mars 2019 Nom & prénom : .....

Trigonométrie – TE n° 733

53

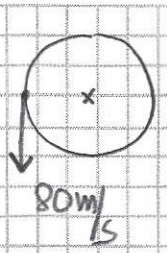
Problème 1 (5 points)

a) Calculer la distance parcourue par une roue de rayon $r = 10$ cm lorsqu'elle a fait 12 tours complets.

distance : $2\pi r \cdot 12 = 24\pi \underbrace{r}_{10} = 240\pi \cong 754$ cm

2

b) Un cylindre droit qui tourne autour de son axe est un modèle simple du cœur d'une tornade. Si une tornade a un cœur de 60 m de diamètre et que la vitesse maximale du vent à la périphérie du cœur est de 290 km/h (ou 80 m/s), calculer le nombre de tours que le cœur fait chaque minute.



$R = 30$m

périmètre $2\pi \cdot 30 = 60\pi$ pour 1 tour

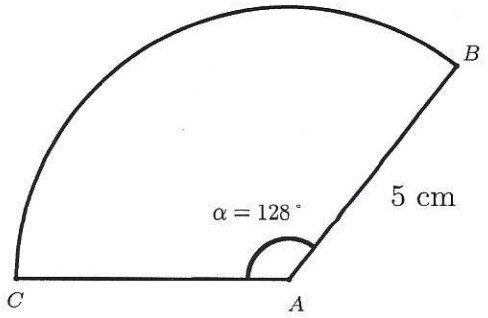
distance : $80\,m/s \cdot \underbrace{60\,s}_{1\,min} = 4800$m

3

Nombre de tour : $4800 \div 60\pi = \frac{80}{\pi} \cong 25{,}5$ tours

Problème 2 (4points)

On donne le secteur circulaire d'un disque de rayon $r = 5$ cm et d'angle $\alpha = 128°$.



Calculer :

a) la longueur de l'arc BC ;

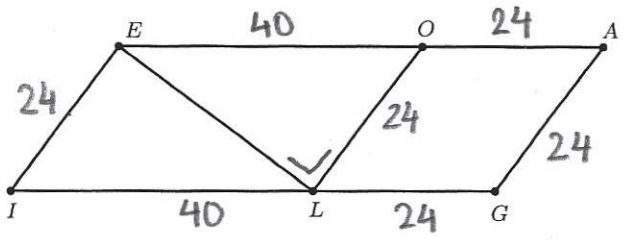
b) l'aire du secteur.

a) longueur de l'arc : $\frac{\pi}{180} \cdot 128 \cdot 5 = \frac{32}{9}\pi \cong 11{,}17$ cm 2

b) aire du secteur : $\frac{\pi}{360} \cdot 128 \cdot 5^2 = \frac{80}{9}\pi \cong 27{,}93$ cm^2 2

Problème 3 (5 points)

LEO est un triangle rectangle en L.
$OLGA$ est un losange.
$OEIL$ est un parallélogramme.
$EO = 40$ cm et $OA = 24$ cm .
$LE > LA$ ou $LE < LA$?
Justifier par calcul votre réponse !



1) Calcul de LE :

$LE = \sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{1024} = \underline{32 \text{ cm}}$ 1

2) Calcul de LA :

$\widehat{EOL} = \cos^{-1}\left(\frac{24}{40}\right) = \cos^{-1}(0.6) \cong 53,13°$

$\widehat{LOA} \cong 180° - 53,13° = 126,87°$

$LA^2 = 24^2 + 24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 24 \cdot \cos(126,87°)$

$= 1152 - 1152 \cdot \cos(126,87°)$

$= 1152(1 - \cos(126,87°))$

$\cong 1843,20$

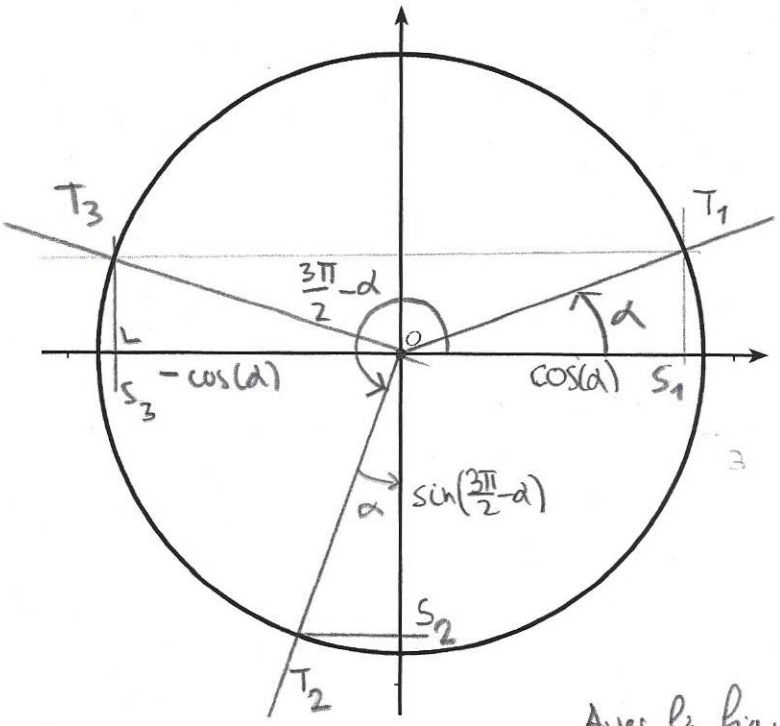
$LA \cong 42,93$ cm 3

Donc $\underline{LA > LE}$ 1

Problème 4 (2points)

Démontrer, en utilisant le cercle trigonométrique, la relation

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos(\alpha)$$



Avec la figure

$\Delta OS_1T_1 = \Delta OS_2T_2 = \Delta OS_3T_3$

$\cos(\alpha) = OS_1$

$\left.\begin{array}{l} -\cos(\alpha) = -OS_3 \\ \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = OS_2 \end{array}\right\} OS_2 = OS_3$

2

$\left.\begin{array}{l} OS_1 = \cos(\alpha) \\ OS_3 = -\cos(\alpha) \\ OS_2 = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \end{array}\right\}$ ces trois segments sont égaux

Problème 5 (4points)

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

a) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos(t) = -1$ c) $\tan(t) = \sqrt{3}$

a) $\boxed{\text{TI}}$ $x = -60°$

$x = -60° + k \cdot 360°$ ou $x = 240° + k \cdot 360°$ 2

b) $\boxed{\text{TI}}$ $t = 180°$

$t = 180° + k \cdot 360°$ 1

c) $\boxed{\text{TI}}$ $t = 60°$

$t = 60° + k \cdot 180°$ 1

Problème 6 (9 points)

Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-5x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

a) <u>égaux :</u> $3x - \frac{\pi}{2} = -5x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$8x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{4}$ 2

<u>supp :</u> $3x - \frac{\pi}{2} = \pi - \left(-5x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$-2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ 2

Sol. $x = \frac{5\pi}{48} + k\frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$

b) $\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\cos\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ 3

<u>égaux :</u> $2x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + x + 2k\pi$

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 1

<u>opposé :</u> $2x + \frac{5\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2k\pi$

$3x = -\pi + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ 1

Problème 7 (10 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

b) $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$

a) Posons $y = \sin(x)$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$(2y-1)(y-1) = 0$ 1

(i) $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{TI}\ x = 30°$

$x = 30° + k \cdot 360°$ ou $x = 150° + k \cdot 360°$ 2

(ii) $y = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1$

$x = 90° + k \cdot 360°$ 2

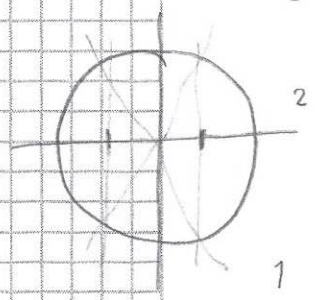
sol: $x = 30° + k \cdot 360°$, $x = 90° + k \cdot 360°$, $x = 150° + k \cdot 360°$

b) $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) - 2 = 0$

$6\cos^2(x) - 4(1 - \cos^2(x)) - 1 = 0$ 2

$10\cos^2(x) - 5 = 0$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2



solution: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ 1

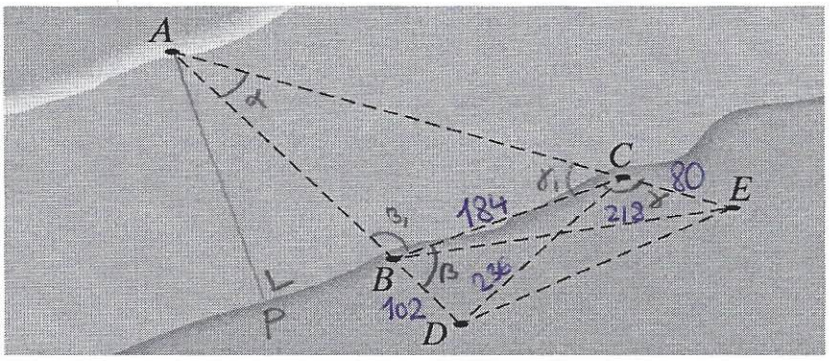
Problème 8 (7 points)

On peut calculer la largeur d'un fleuve sans avoir à mesurer d'angle. Comme le montre la figure, on choisit un point A sur une rive et deux points B et C sur la rive opposée. Les segments de droite AB et AC sont étendus jusqu'aux points D et E (voir figure). Puis on mesure les distances BC, BD, BE, CD et CE. Supposons que les distances sont :

$$BC = 184 \text{ m}, \quad BD = 102 \text{ m}, \quad BE = 218 \text{ m}, \quad CD = 236 \text{ m}, \quad \text{et} \quad CE = 80 \text{ m}.$$

a) Calculer les distances AC et AB.

b) Calculer, à partir du point A, la plus courte distance au travers du fleuve.



a) $\widehat{CBD} = \cos^{-1}\left(\dfrac{184^2 + 102^2 - 236^2}{2 \cdot 184 \cdot 102}\right) \cong 107{,}74^\circ = \beta$ 1

$\widehat{BCE} = \cos^{-1}\left(\dfrac{184^2 + 80^2 - 218^2}{2 \cdot 184 \cdot 80}\right) \cong 104{,}29^\circ = \gamma$ 1

$\Rightarrow \widehat{ABC} \cong 72{,}26^\circ = \beta_1$ et $\widehat{ACB} \cong 75{,}71^\circ = \gamma_1$, $\widehat{BAC} \cong 32{,}03^\circ = \alpha$ 1

Donc $AC \cong \dfrac{184}{\sin(32{,}03^\circ)} \cdot \sin(72{,}26^\circ) \cong 330{,}44$ [m] 1

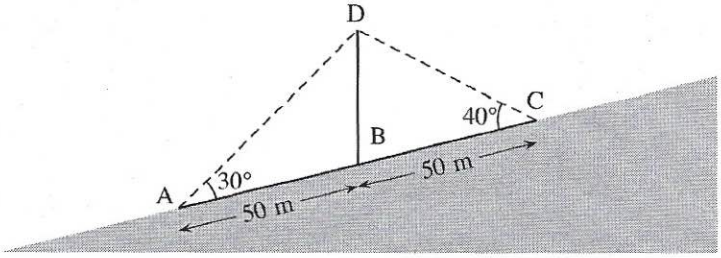
$AB \cong \dfrac{184}{\sin(32{,}03)} \sin(75{,}71^\circ) \cong 336{,}20$ [m] 1

b) APB rectangle en P $\quad AP = 336.20 \sin(72{,}26^\circ)$

$\cong 320.22$ [m] 2

Problème 9 (4points)

Un mât, situé au flanc d'une colline, est retenu par deux câbles comme sur la figure. Les points d'ancrage des câbles (A et C) sont situés à 50 mètres de part et d'autre du pied du mât (point B). Le câble aval AD forme un angle de 30° avec la colline tandis que le câble amont CD forme un angle de 40° avec la colline.



Quelle est la hauteur du mât BD ?

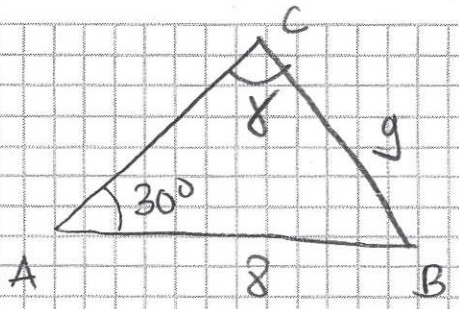
- $\widehat{ADC} \cong 110°$
- $\dfrac{AD}{\sin(40°)} = \dfrac{100}{\sin(110°)} \Rightarrow AD = \dfrac{\sin(40°)}{\sin(110°)} 100 \cong 68{,}40$ m
- $BD^2 \cong 68{,}40^2 + 50^2 - 2 \cdot 68{,}40 \cdot 50 \cdot \cos(30°)$

  $\cong 1254{,}94$

  $BD \cong 35{,}43$ m

Problème 10 (3points)

On connait les éléments suivants d'un triangle ABC : $AB = 8$ cm, $\alpha = 30°$ et $BC = 9$ cm. Calculer l'angle γ de ce triangle. Donner toutes les possibilités.



$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{8}{\sin\gamma} = \frac{9}{\sin 30°}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{8}{9} \cdot \underbrace{\sin 30°}_{1/2} = \frac{4}{9}$$

donc $\gamma \cong 26{,}39°$ $\boxed{TI}$

Comme $BC > AB$, il n'y a qu'une solution pour γ