09.01.19

2.3.18 Factoriser :

a) $\underbrace{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x}_{P}$

$$P = x\left(\underbrace{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}_{P_1}\right)$$

Trouvons les zéros entiers de P_1 : $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6$

- $P_1(1) \neq 0$
- $P_1(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0 \Rightarrow (x+1) \mid P_1$

Effectuons la division de P_1 par $x + 1$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^2 + x^2 & \underbrace{x^2 + x - 6}_{P_2} \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 5x & \\
 & x^2 + x & \\ \cline{2-2}
 & -6x - 6 & \\
 & -6x - 6 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$P = x(x+1)(x^2 + x - 6)$$

$$\boxed{P = x(x+1)(x-2)(x+3)}$$

b) $\underbrace{x^5 + 3x^4}$ $- 16x - 48 = P$

$= x^4(x+3) - 16(x+3)$

$= (x^4 - 16)(x+3)$

$= (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x+3)$

$= \underline{(x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)}$

Schéma de Horner

Pour diviser par $x+\alpha$, il existe une présentation plus rapide !

Divisons $x^4 - 2x^2 + 8x - 7$ par $x + 2$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \quad - 2x^2 + 8x - 7 & x+2 \\
\hline
-\ x^4 + 2x^3 & 1x^3 - 2x^2 + 2x + 4 \\
\hline
\quad -2x^3 - 2x^2 & \\
-\ -2x^3 - 4x^2 & \\
\hline
\quad 2x^2 + 8x & \\
\quad 2x^2 + 4x & \\
\hline
\quad 4x - 7 & \\
\quad 4x + 8 & \\
\hline
\quad -15 &
\end{array}
$$

$$= (-2)^4 - 2(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 7$$
$$= 16 - 8 - 16 - 7 = -15$$

	1	0	-2	8	-7
-2		-2	4	-4	-8
	1	-2	2	4	-15

$$P = (x^3 - 2x^2 + 2x + 4)(x+2) + (-15)$$

2.3.19 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $\underbrace{3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6}_{p}$ par $\underbrace{x + 2}_{q}$

c)

	3	−8	7	1	−5	6
−2		−6	28	−70	138	−266
	3	−14	35	−69	133	−260

$$p = (3x^4 - 14x^3 + 35x^2 - 69x + 133)(x + 2) - 260$$

b)

	1	0	0	0	0	1
−1		−1	1	−1	1	−1
	1	−1	1	−1	1	0

$$x^5 + 1 = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x + 1)$$

2.3.22 Le polynôme $p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$ possède un zéro compris entre 0 et -5. Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs.

$$p(-2) = -16 + 12 + 22 - 6 \neq 0$$

$$p(-3) = -54 + 27 + 33 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x+3 \,/\, p$$

Par Horner :

	2	3	-11	-6
-3		-6	9	6
	2	-3	-2	0

$$p = (x+3)(2x^2 - 3x - 2)$$

$$\boxed{p = (x+3)(2x+1)(x-2)}$$

2.3.18

c) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4 = p$

Les zéros rationnels de p apparaissent parmi les nombres suivants :

$\frac{u}{v}$ où u est un diviseur de 4
et v est un diviseur de 6

$$p = 6\left(x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{23}{6}x^2 + \frac{20}{6}x - \frac{4}{6}\right)$$

$\pm\frac{1}{1}$; $\pm\frac{2}{1}$; $\pm\frac{4}{1}$; $\pm\frac{1}{2}$; $\cancel{\pm\frac{2}{2}}$; $\cancel{\frac{4}{2}}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{2}{3}$; $\pm\frac{4}{3}$

$\pm\frac{1}{6}$; $\cancel{\pm\frac{2}{6}}$; $\cancel{\pm\frac{4}{6}}$