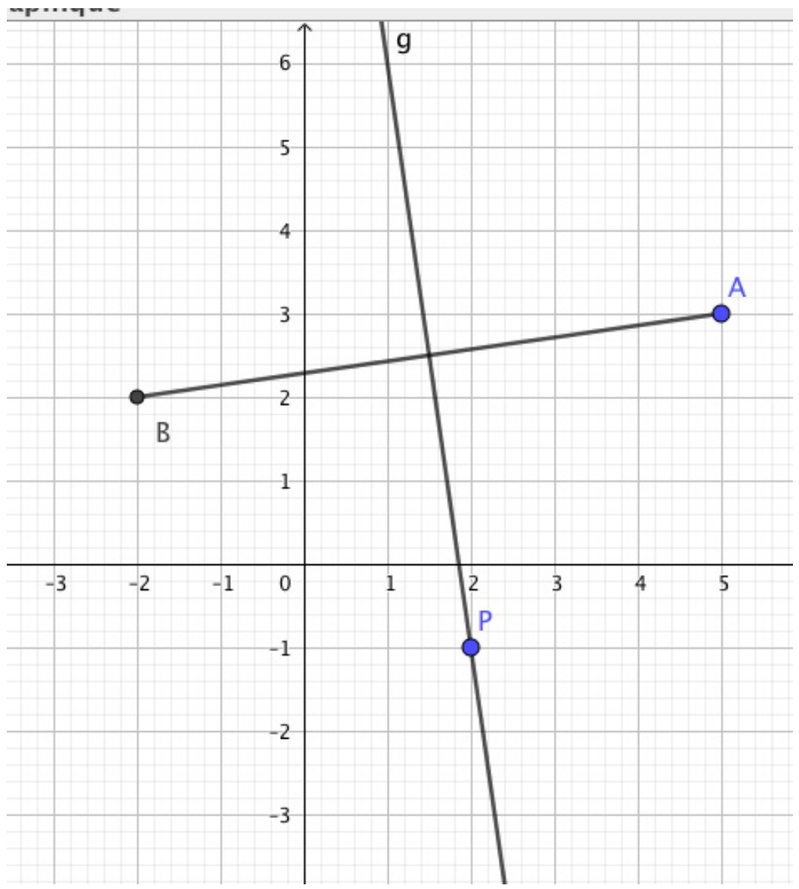
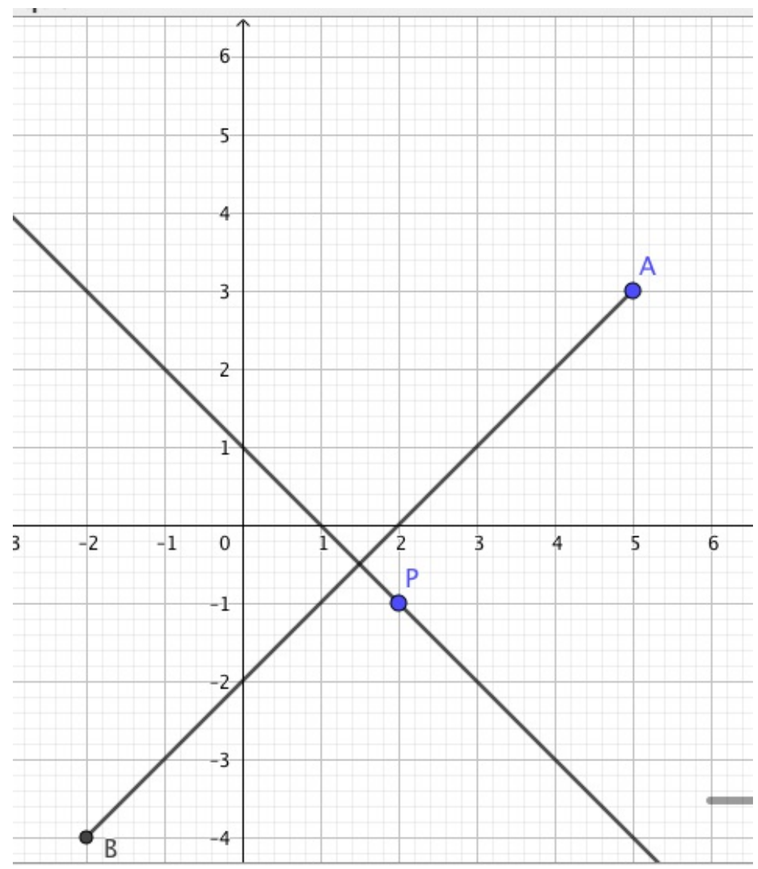
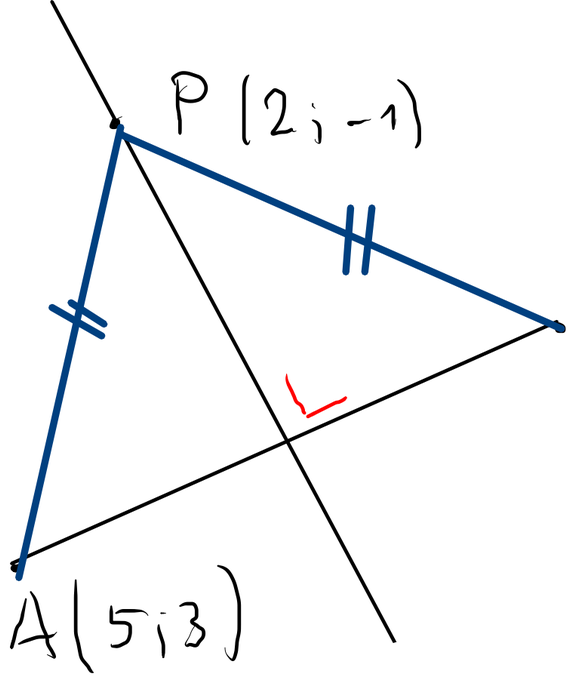
14.11.19

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.





Geogebra nous donne deux solutions



P sur la médiatrice de AB, donc

$$\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$$

1) $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

2) $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -2 \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ K+1 \end{pmatrix}$

$$\|\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (K+1)^2}$$

$$= \sqrt{16 + K^2 + 2K + 1}$$

$$= \sqrt{K^2 + 2K + 17}$$

1ère méthode

$$\sqrt{K^2 + 2K + 17} = 5 \quad \Big| \; (\;)^2$$

$$K^2 + 2K + 17 = 25$$

$$K^2 + 2K - 8 = 0$$

$$(K+4)(K-2) = 0$$

done $\quad K = -4 \quad$ ou $\quad K = 2$

2ème méthode

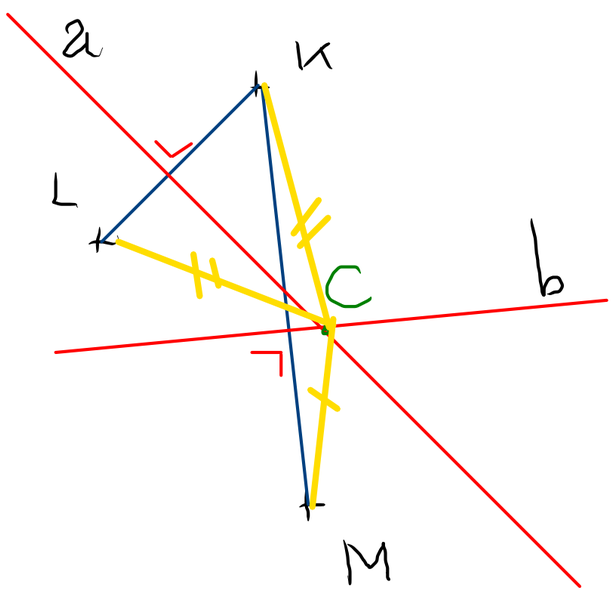
Comme $\|\vec{PB}\| = 5$, alors

$$\sqrt{(-4)^2 + (K+1)^2} = 5$$

donc $K + 1 = 3$ ou $K + 1 = -3$

et ainsi $K = 2$ ou $K = -4$

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.



a : médiatrice de LK

b : médiatrice de MK

$a \cap b = \{c\}$

où C est le point cherché

$$\|\vec{CL}\| = \|\vec{CK}\| = \|\vec{CM}\|$$

Posons $C(x, y)$

$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - x \\ -10 - y \end{pmatrix}$$

$$\vec{CK} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - x \\ 6 - y \end{pmatrix}$$

$$\vec{CM} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - x \\ 4 - y \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{CL}\|^2 = (9-x)^2 + (-10-y)^2$$

$$= \underline{81 - 18x + x^2 + 100 + 20y + y^2} \quad (1)$$

$$\|\overrightarrow{CK}\|^2 = (-3-x)^2 + (6-y)^2$$

$$= \underline{9 + 6x + x^2 + 36 - 12y + y^2} \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{KM}\|^2 = (-5-x)^2 + (4-y)^2$$

$$= \underline{25 + 10x + x^2 + 16 - 8y + y^2} \quad (3)$$

$(1) = (2)$

$$81 - 18x + 100 + 20y = 9 + 6x + 36 - 12y$$

$$\underline{\underline{-24x + 32y = -136}}$$

$(1) = (3)$

$$81 - 18x + 100 + 20y = 25 + 10x + 16 - 8y$$

$$\underline{\underline{-28x + 28y = -140}}$$

Résolvons le système d'équations :

$$\begin{cases} -24x + 32y = -136 \\ -28x + 28y = -140 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \div (-8) \\ \div (-28) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x \\ \cdot 1 \\ \cdot (-3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 2 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

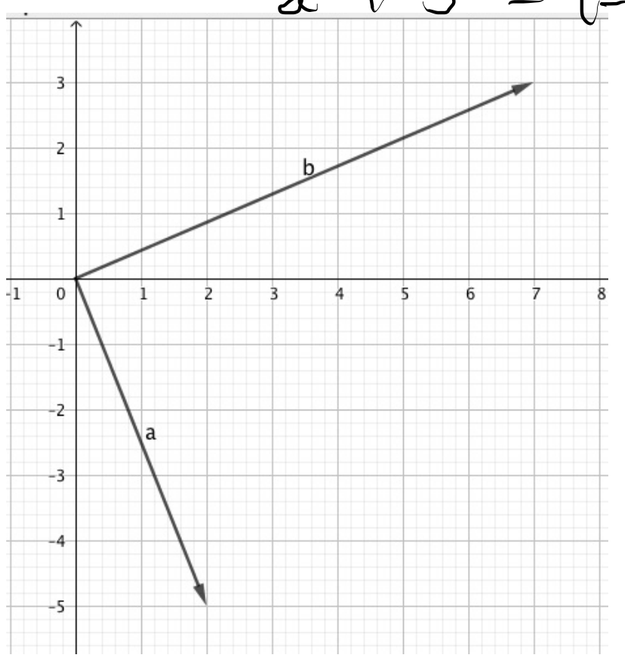
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C\,(3\,;-2)}$$

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

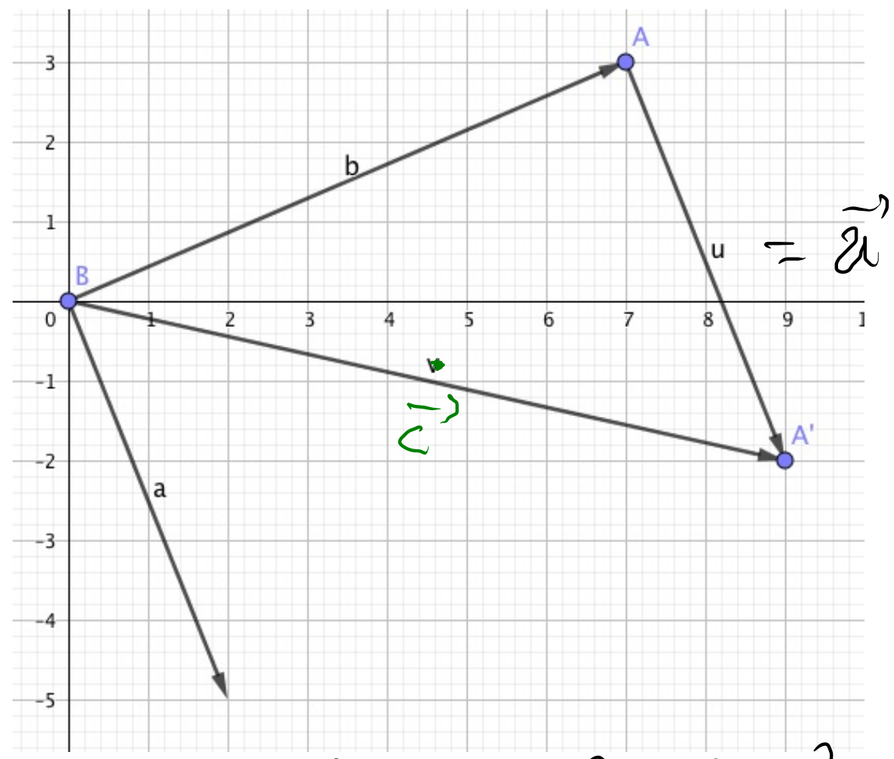
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$



Conditions $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2$

$29 + 58 \overset{?}{=} 85$

$87 > 85$

donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires

Critère d'orthogonalité

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \; ; \quad \|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \; ; \quad \|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} ; \quad \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$

Donc $(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$

$$0 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

Donc $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ pas perpendiculaires