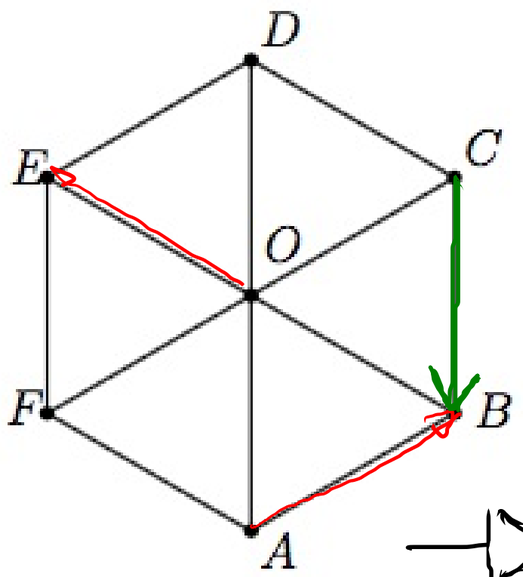
19.09.18

1.2.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}$$



a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}\right)$

d) dans la base $\mathfrak{B}_4 = \left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}$

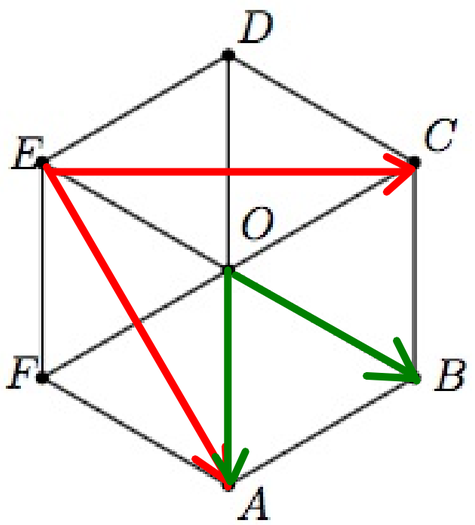
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2.6



c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}\right)$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$

$$\boxed{\text{Soit } \mathfrak{B}^* = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)}$$

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 1 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_*$$

$$\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_* \qquad \overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c} \overrightarrow{OA} & \\ \cdot 1 & \cdot 2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} &= 3\overrightarrow{OB} \\ 2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EC} &= 3\overrightarrow{OA} \end{aligned}}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_3} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_3}$$

$$
\begin{array}{l|c|c}
 & y & x \\
\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 6x + 2y = 11 \end{cases} & \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot (-1) \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
9x \quad &= 23 \\
-6y \quad &= 13
\end{aligned}
$$

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

$\mathfrak{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ K, m sont des inconnues

$$K \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2K \\ 4K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m \\ -9m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2K + 3m \\ 4K - 9m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2K + 3m = 12 \\ 4K - 9m = -6 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} K & m \\ \cdot 2 & \cdot 3 \\ \cdot(-1) & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15m = 30 \\ 10K = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ K = 3 \end{cases}$$

Critère pour déterminer si deux vecteurs de V_2 sont colinéaires.

<u>Ex</u> Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ on a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

A-t-on $\vec{a}$ colinéaire à $\vec{b}$?

Existe-t-il $K \in \mathbb{R}$ tel que $K\vec{a} = \vec{b}$?

En prenant $K = \frac{-3}{2}$, on a $\frac{-3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \cdot 4 \\ -\frac{3}{2} \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

On a bien $-\frac{3}{2}\vec{a} = \vec{b}$.

En effet $\begin{cases} 4K = -6 \\ -6K = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \\ K = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \sim \vec{b} \iff \exists K \in \mathbb{R}$ tel que $K\vec{a} = \vec{b} \iff$

$$\begin{pmatrix} Ka_1 \\ Ka_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Ka_1 = b_1 \\ Ka_2 = b_2 \end{cases} \underset{\substack{a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0}}{\iff} \begin{cases} K = \dfrac{b_1}{a_1} \\ K = \dfrac{b_2}{a_2} \end{cases}$$

$$\iff \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

La dernière expression s'ecrit :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$ (déterminant d'une matrice 2×2)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \sim \vec{b}$?

$$\begin{vmatrix} 21 & 14 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 84 - (-112) = 196 \neq 0$$