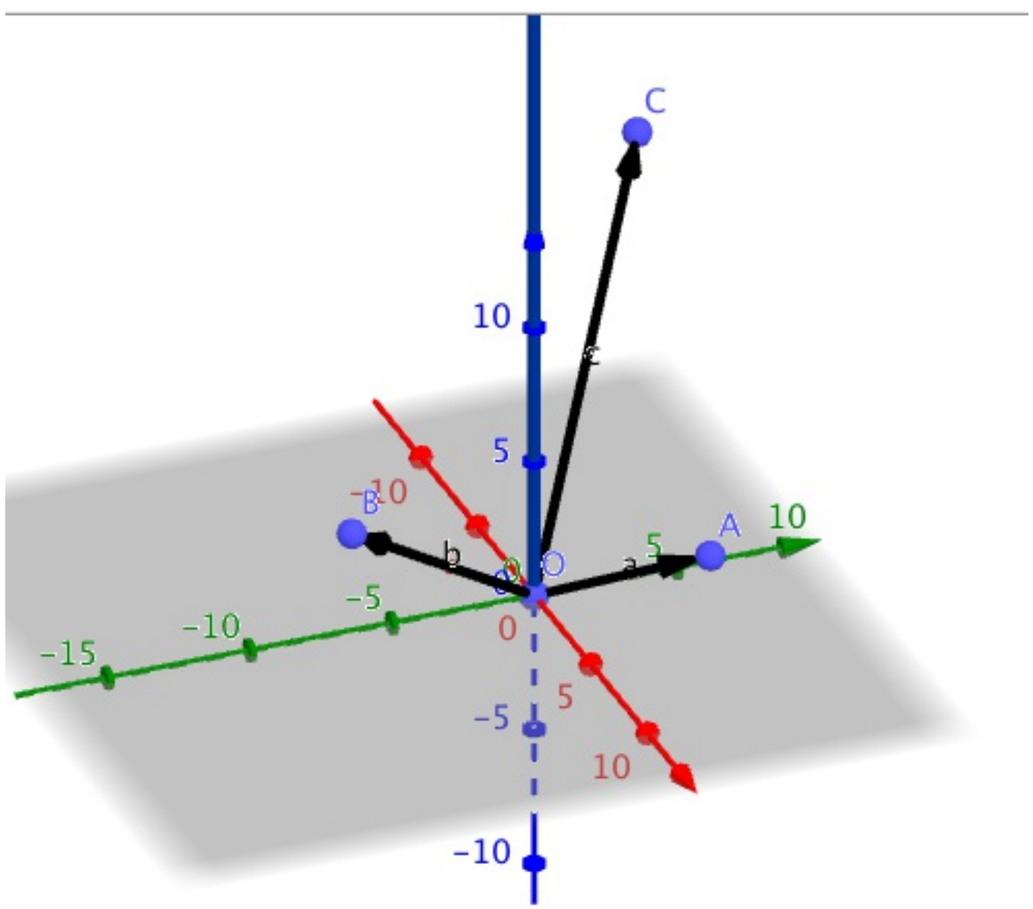
26.09.18

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$



Geogebra nous "montre" que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de V_3

Nous cherchons k, t et $s \in \mathbb{R}$ tels que

$$k\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c} = \vec{v}$$

$$K\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-8\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-16\\10\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\52\end{pmatrix}$$

On résout un système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} 3K + 4t - 16s = 0 \\ 5K - 8t + 10s = 0 \\ 2K + 6t + 7s = 52 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} t \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} t \\ \cdot 3 \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11K - 22s = 0 \\ 5K - 62s = -104 \\ 3K + 4t - 16s = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} \div 11 \\ \\ \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} K - 2s = 0 \\ 5K - 62s = -104 \end{array}} \\ 3K + 4t - 16s = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} K \\ \cdot 5 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K - 2s = 0 \\ 5K - 62s = -104 \\ 3K + 4t - 16s = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} K \\ \cdot 5 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 52s = 104 \\ K - 2s = 0 \\ 3K + 4t - 16s = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ K = 4 \\ 12 + 4t - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ K = 4 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B}$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Démontrons que $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme une base de V_3

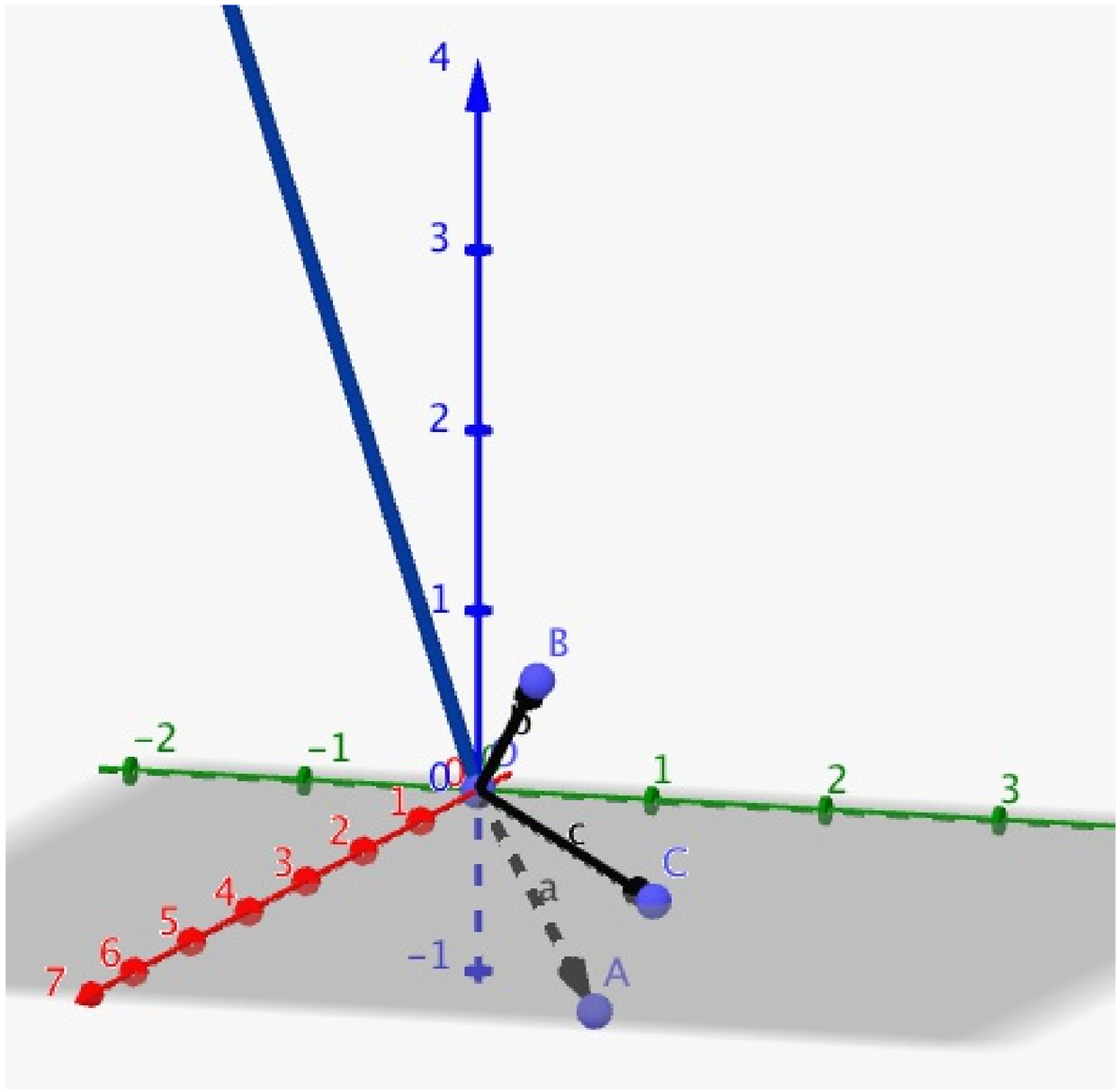
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 2 - 18$$

$$= -20$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne sont pas coplanaires; donc $\mathcal{B}$ est une base

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$



$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$= 0 - 4 + 3 + 3 - 2 - 0$

$= 0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires

Nous pouvons exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

$$x\vec{b} + y\vec{c} = \vec{v}$$

$$x\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-7\\21\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = -7 \\ x = 21 \end{cases}$$

Nous la laissons de côté

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = 21 \\ 2y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ \boxed{\begin{matrix} x = 21 \\ y = -14 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$2 \cdot 21 + 3(-14) = 42 - 42 = 0$$

$$\vec{v} = 0 \cdot \vec{a} + 21\,\vec{b} - 14\,\vec{c} = \cancel{\begin{pmatrix}0\\21\\-14\end{pmatrix}}$$

cette solution n'est pas unique !

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \\ 1 & -5 \end{matrix} = -14 - 3 - 5 - 7 + 30 - 1$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \qquad = 0$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires. Laissons $\vec{b}$ de côté

$$x\vec{a} + y\vec{c} = \vec{v}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Laissons-la de côté !} \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4y = -1 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ y = -1/4 \\ x = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4} \end{cases}$$

Vérifions la solution :

$$\frac{15}{2} - \frac{1}{4} = \frac{30-1}{4} = \frac{29}{4} = 7{,}25 \neq 7$$

Le système n'a pas de solution, donc on ne peut pas exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.