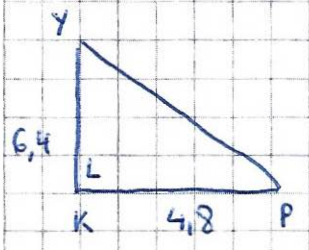
1M1 – Mardi 28 septembre 2021 Nom : ....

Technique de calcul et Vecteurs – TE n° 764A

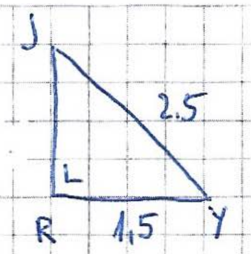
Problème 1 (4 points)

a) Soit KPY un triangle rectangle en K tel que : $PK = 4{,}8\,\text{cm}$ et $YK = 6{,}4\,\text{cm}$.
Calculer la longueur YP.



Par Pythagore : $YP = \sqrt{6{,}4^2 + 4{,}8^2} = 8$ cm

b) Soit YJR un triangle rectangle en R tel que : $YR = 1{,}5\,\text{cm}$ et $JY = 2{,}5\,\text{cm}$.
Calculer la longueur JR.

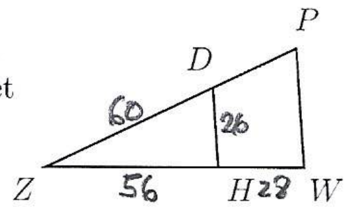


Par Pythagore : $JR = \sqrt{2.5^2 - 1.5^2}$

$= 2$ cm

Problème 2 (4 points)

Sur la figure ci-contre, les droites (WP) et (HD) sont parallèles. On donne $ZH = 56\,\text{cm}$, $ZD = 60\,\text{cm}$, $HD = 26\,\text{cm}$ et $HW = 28\,\text{cm}$.
Calculer ZP et WP, arrondies au centième



a) $\frac{60}{56} = \frac{DP}{28} \Rightarrow DP = 30 \Rightarrow ZP = 90$

b) $\Delta ZHD \sim \Delta ZWP$

$$\frac{56}{56+28} = \frac{26}{WP} \Rightarrow WP = \frac{26 \cdot (56+28)}{56} = \frac{2184}{56} = 39$$

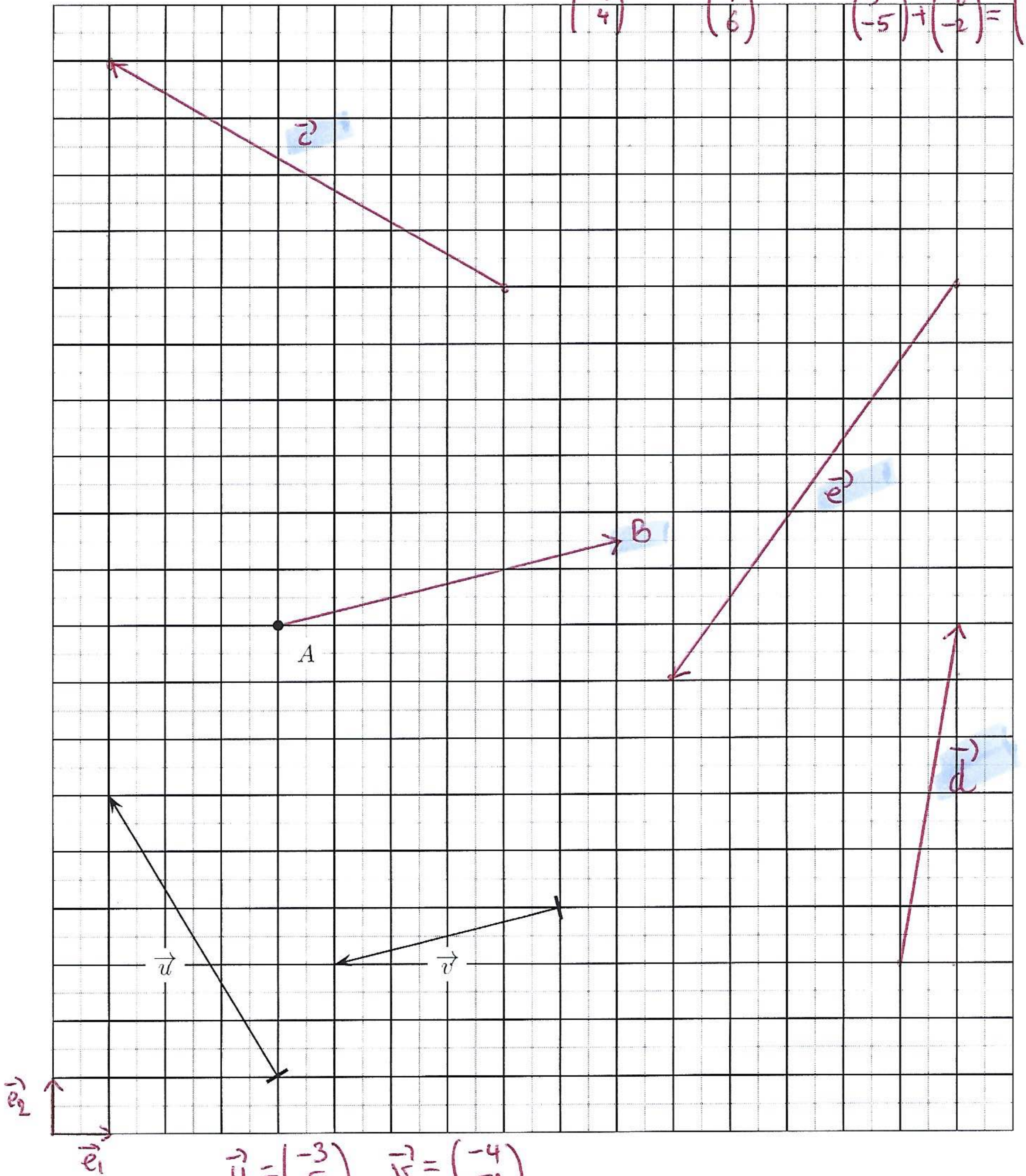
Problème 3 (4 points)

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous.

a) Placer un point B de sorte que le vecteur $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{v}$. $= -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

b) Dessiner des représentants des vecteurs $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{e} = -\vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$.

$\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

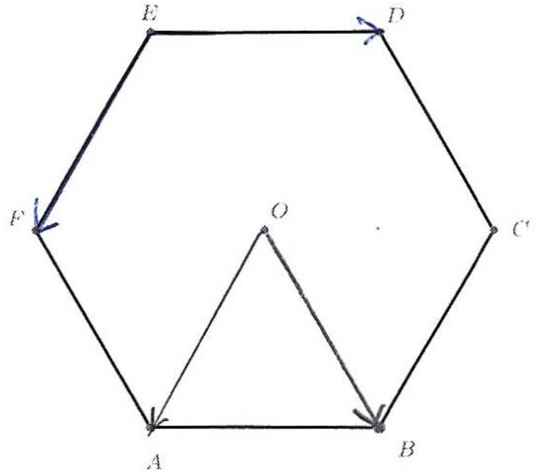


$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Problème 4 (8 points)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{EC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OD}$$



a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

a) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{EO}$
$= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}$
$= -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
$= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{ED}$
$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

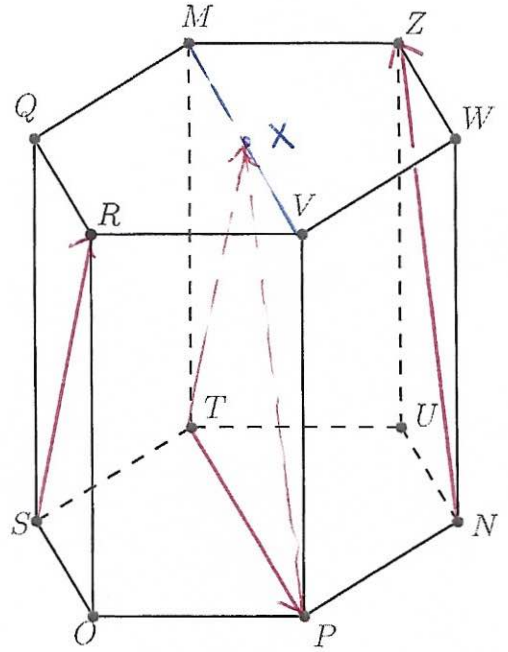
$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problème 5 (4 points)

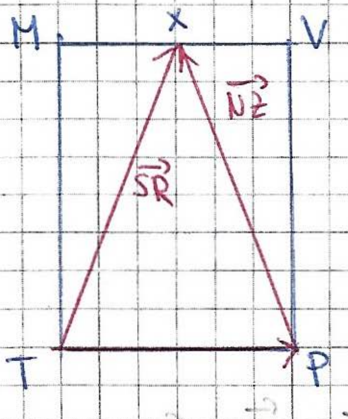
On considère ci-dessous un prisme droit dont les bases sont des hexagones réguliers. Les vecteurs

$$\overrightarrow{NZ}, \quad \overrightarrow{TP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR}$$

sont ils coplanaires ? Justifier brièvement la réponse. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaison linéaire des deux autres.



Ils sont coplanaires. On peut les placer dans le plan (vectoriel) MVPT.



X milieu de MV

$\vec{SR} - \vec{TP} = \vec{NZ}$

$\vec{SR} + \vec{ZN} = \vec{TP}$

$\vec{SR} - \vec{TP} = \vec{NZ}$

Problème 6 (3 points)
Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -4.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = 4 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{c} + \frac{2}{3} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -31 \end{pmatrix}$$

Problème 7 (4 points)
Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{c}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$.

$$\vec{c} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b} \iff \begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 2 \end{cases} \begin{array}{|c|c} y & x \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$