

Géométrie II – TE n° 770A**Problème 1** (points)

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2 , on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculer :

a) $\|\vec{a}\| + \|\vec{c}\|$

b) $3\vec{a} \cdot 2\vec{b}$

c) $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \\ \quad \|\vec{c}\| = 5 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \|\vec{a}\| = 13 \\ \|\vec{c}\| = 5 \end{array}} \right\} \|\vec{a}\| + \|\vec{c}\| = 18$$

$$\text{b)} \quad 3\vec{a} \cdot 2\vec{b} = 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 6(30 - 30) = 0$$

$$\text{c)} \quad (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{c}\|^2 = 169 - 25 = 144$$

Problème 2 (points)

On donne les point $A(1; -7)$, $B(5; -6)$ et $C(6; -10)$

- Montrer que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.
- Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.
- Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.
- Calculer les coordonnées du point M intersection des diagonales AC et BD .

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

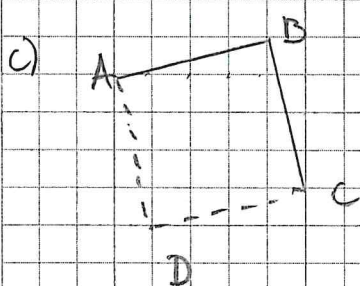
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

2

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{17}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$

2



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$D(2; -11)$$

3

d) M est au milieu de AC : $M\left(\frac{1+6}{2}; \frac{-7-10}{2}\right)$

$$\Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -\frac{17}{2}\right)$$

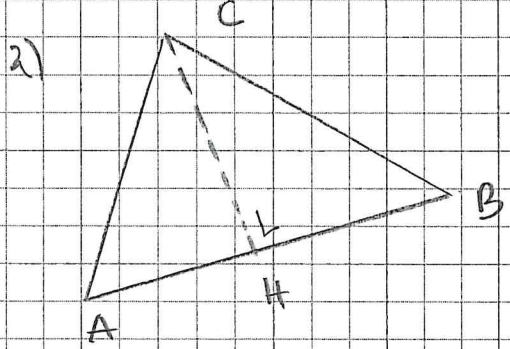
2

Problème 3 (points)

On donne les points $A(-11; -4)$, $B(1; 2)$ et $C(-10; 4)$.

- Déterminer par calcul les coordonnées du point H , projection orthogonale du point C sur AB .
- Déterminer par calcul l'aire du triangle ABC .

2)



$$\vec{AH} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{AB} = \frac{12 + 48}{144 + 36} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{60}{180} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-7; -2)$$

b) Aire: $\frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CH}\| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 36} \cdot \sqrt{9 + 36}$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

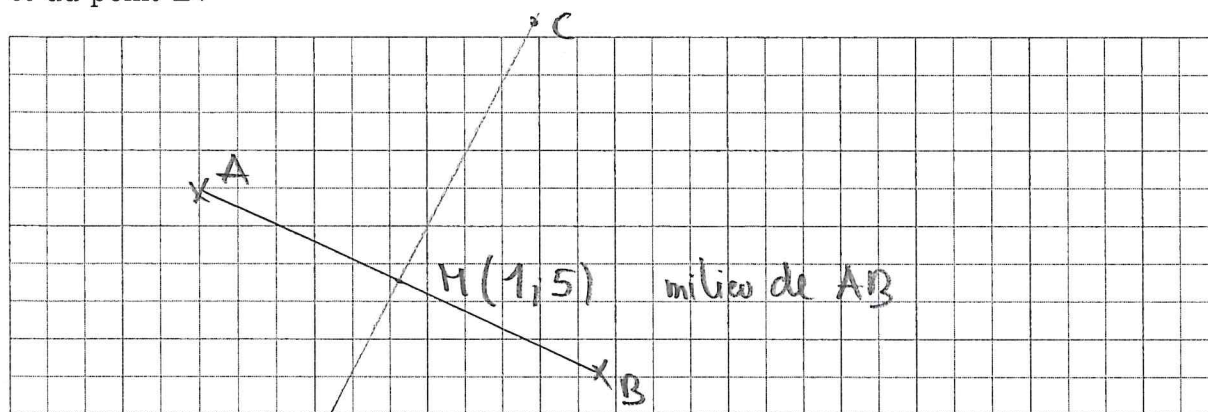
$$= \frac{1}{2} \sqrt{180} \cdot \sqrt{45} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2} 6 \cdot 3 \cdot 5 = 45$$

Problème 4 (points)

On donne les points $A(-3; 8)$, $B(5; 2)$ et $C(10; k)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de k pour que le point C soit situé à la même distance du point A et du point B .



1^{ère} méthode : $\vec{AH} \cdot \vec{HC} = 0$

$$\vec{AH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HC} = \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ k-5 \end{pmatrix}$$

$$36 - 3(k-5) = 0$$

$$36 - 3k + 15 = 0$$

$$3k = 51$$

$$k = 17$$

5

2^{ème} méthode $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BC}\|^2$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ k-8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\|^2 = 13^2 + (k-8)^2$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ k-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\|^2 = 5^2 + (k-2)^2$$

$$169 + k^2 - 16k + 64 = 25 + k^2 - 4k + 4$$

$$204 = 12k$$

$$k = 17$$

$$\Rightarrow C(10; 17)$$