

Géométrie II – TE n° 770B**Problème 1** (points)Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2 , on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calculer :

a) $\|\vec{a}\| + \|\vec{c}\|$

b) $3\vec{a} \cdot 2\vec{b}$

c) $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

a) $\|\vec{a}\| = 13$
 $\|\vec{c}\| = 10$ } $\|\vec{a}\| + \|\vec{c}\| = 23$

b) $3\vec{a} \cdot 2\vec{b} = 6 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 6(30 - 30) = 0$

c) $(\vec{a} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{c}\|^2 = 169 - 100 = 69$

Problème 2 (points)

On donne les point $A(-1;7)$, $B(-5;6)$ et $C(-6;10)$

- Montrer que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.
- Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.
- Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.
- Calculer les coordonnées du point M intersection des diagonales AC et BD .

$$\begin{aligned} 2) \quad \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= 4 - 4 = 0 \\ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} & \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \\ \|\overrightarrow{BC}\| &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \\ \|\overrightarrow{BC}\| &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}} \right\} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\begin{aligned} c) \quad \begin{array}{c} A \quad B \\ \hline \square \\ \hline D \quad C \end{array} \quad \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow D(-2;11) \end{aligned}$$

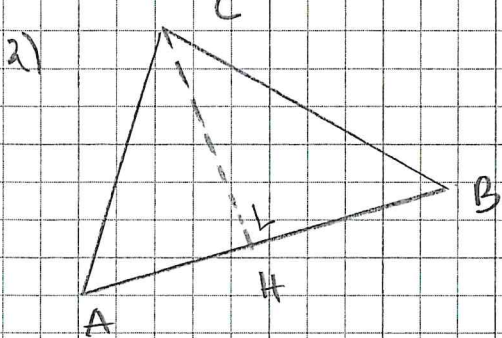
$$\begin{aligned} d) \quad M \text{ est le milieu de } AC: \quad M &\left(\frac{-1-6}{2}; \frac{7+10}{2} \right) \\ &\Rightarrow M \left(-\frac{7}{2}; \frac{17}{2} \right) \end{aligned}$$

Problème 3 (points)

On donne les points $A(-11; -4)$, $B(1; 2)$ et $C(-10; 4)$.

- a) Déterminer par calcul les coordonnées du point H , projection orthogonale du point C sur AB .
- b) Déterminer par calcul l'aire du triangle ABC .

2)



$$\vec{AH} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{AB} = \frac{12 + 48}{144 + 36} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{60}{180} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(-7; -2) \quad 5$$

b) Aire: $\frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CH}\| = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 36} \cdot \sqrt{9 + 36}$

$$\vec{CH} = \vec{OH} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

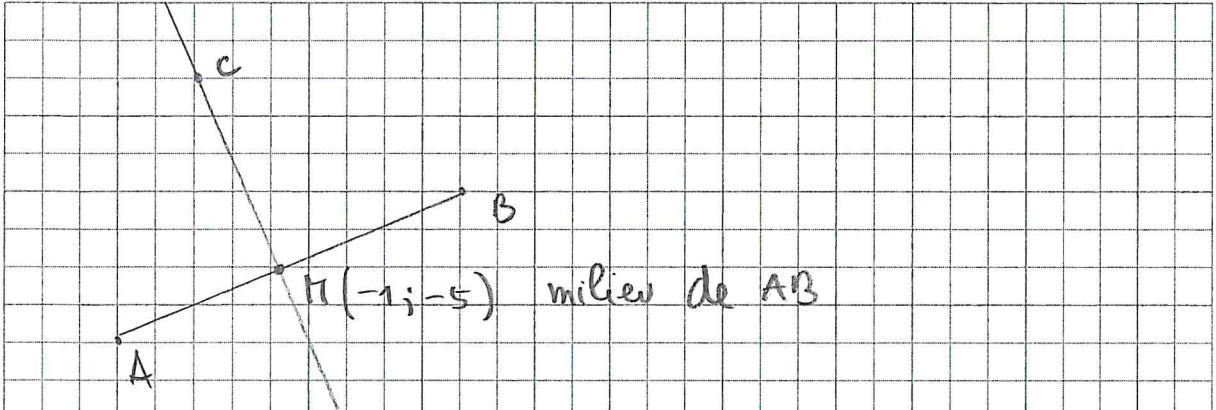
$$= \frac{1}{2} \sqrt{180} \cdot \sqrt{45} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2} 6 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \quad 5$$

Problème 4 (points)

On donne les points $A(3; -8)$, $B(-5; -2)$ et $C(-10; k)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de k pour que le point C soit situé à la même distance du point A et du point B .



1^{ère} méthode : $\vec{AH} \cdot \vec{HC} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \vec{AH} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{HC} &= \begin{pmatrix} -10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ k+5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 36 + 3(k+5) &= 0 \\ 36 + 3k + 15 &= 0 \\ 3k &= -51 \\ k &= -17 \end{aligned}$$

2^{ème} méthode $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BC}\|^2$

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \begin{pmatrix} -10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ k+8 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\|^2 = 13^2 + (k+8)^2 \\ \vec{BC} &= \begin{pmatrix} -10 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ k+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\|^2 = 5^2 + (k+2)^2 \end{aligned}$$
$$169 + k^2 + 16k + 64 = 25 + k^2 + 4k + 4$$
$$204 = -12k$$
$$k = -17$$

$\Rightarrow C(-10; -17)$