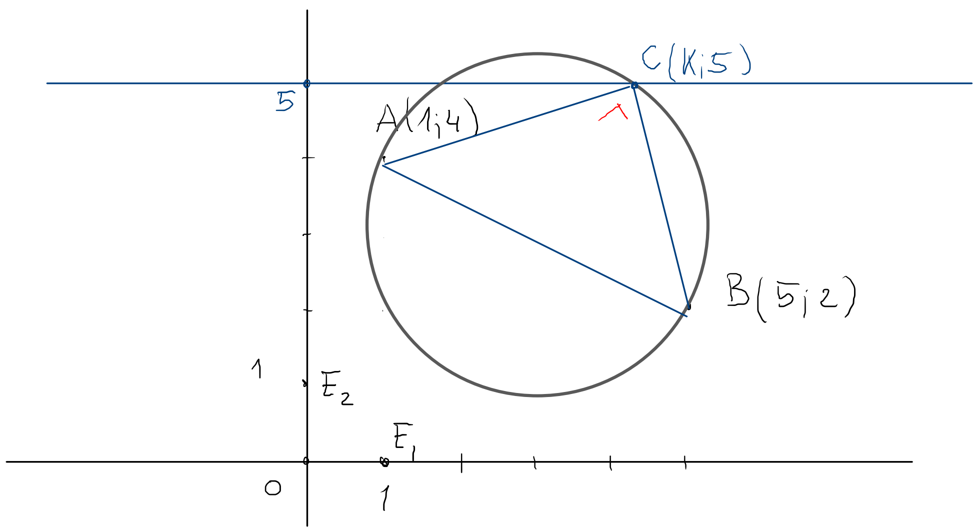
06. 12. 21

1.4.17 On donne les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et le point $C(k;5)$, $k \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?



1er cas : Le ΔABC est rectangle en C.

Le point C se situe sur l'intersection du cercle de Thalès de AB et sur la droite $y=5$.

Le dessin montre l'existence de deux solutions.

$$AC \perp BC \Leftrightarrow \vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} K \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} K \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

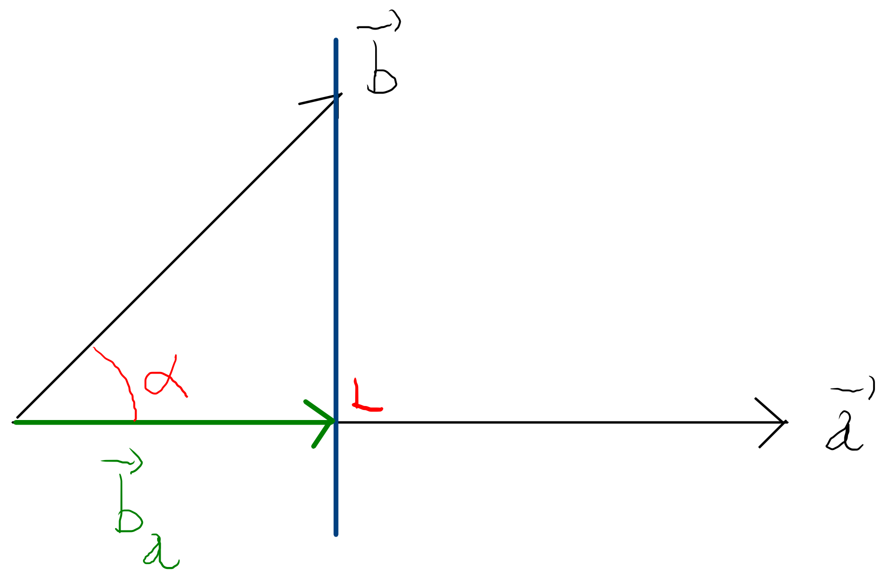
$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (K-1)(K-5) + 3 = K^2 - 6K + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow K^2 - 6K + 8 = 0 \Leftrightarrow (K-4)(K-2) = 0 \Leftrightarrow K=2 \text{ ou } K=4$$

Finalement, les points cherchés sont $C_1(2;5)$ ou $C_2(4,5)$

2ème cas : le ΔABC est rectangle en A

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.



Formule $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$

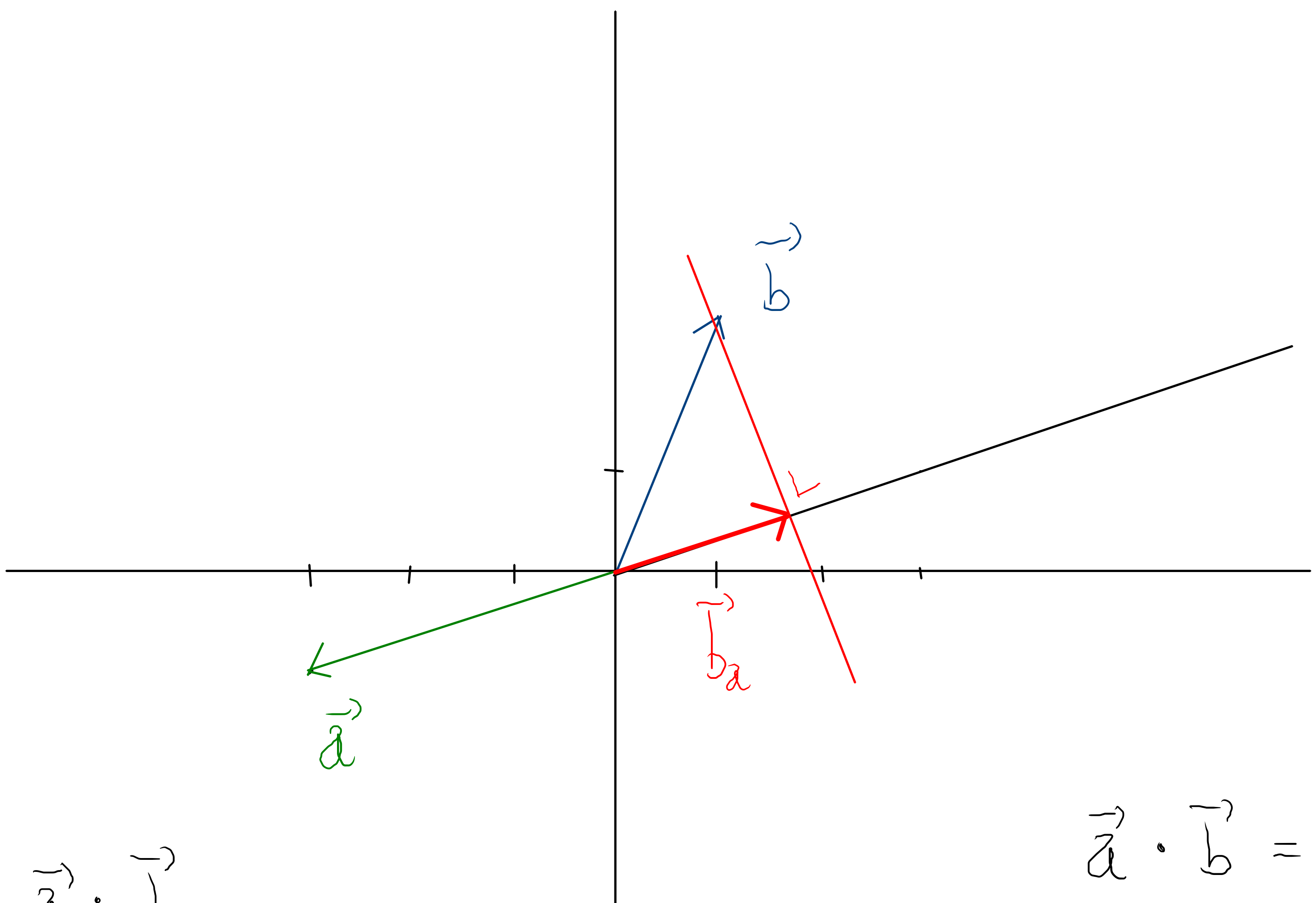
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \alpha = 90^0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}$

Comme $\vec{b}_a \sim \vec{a}$ alors $\|\vec{b}_a\| = \|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$

Ainsi $\|\vec{b}_a\| = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}$ et $\vec{b}_a = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$

$$\boxed{\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}}$$

1.4.22 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle. Construire et calculer la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.



1.4.22

1.4.24

1.4.28

1.4.31

1.4.32

1.4.33

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$

$\|\vec{a}\|^2 = 10$

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$$\vec{b}_a = \frac{-5}{10} \vec{a} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$