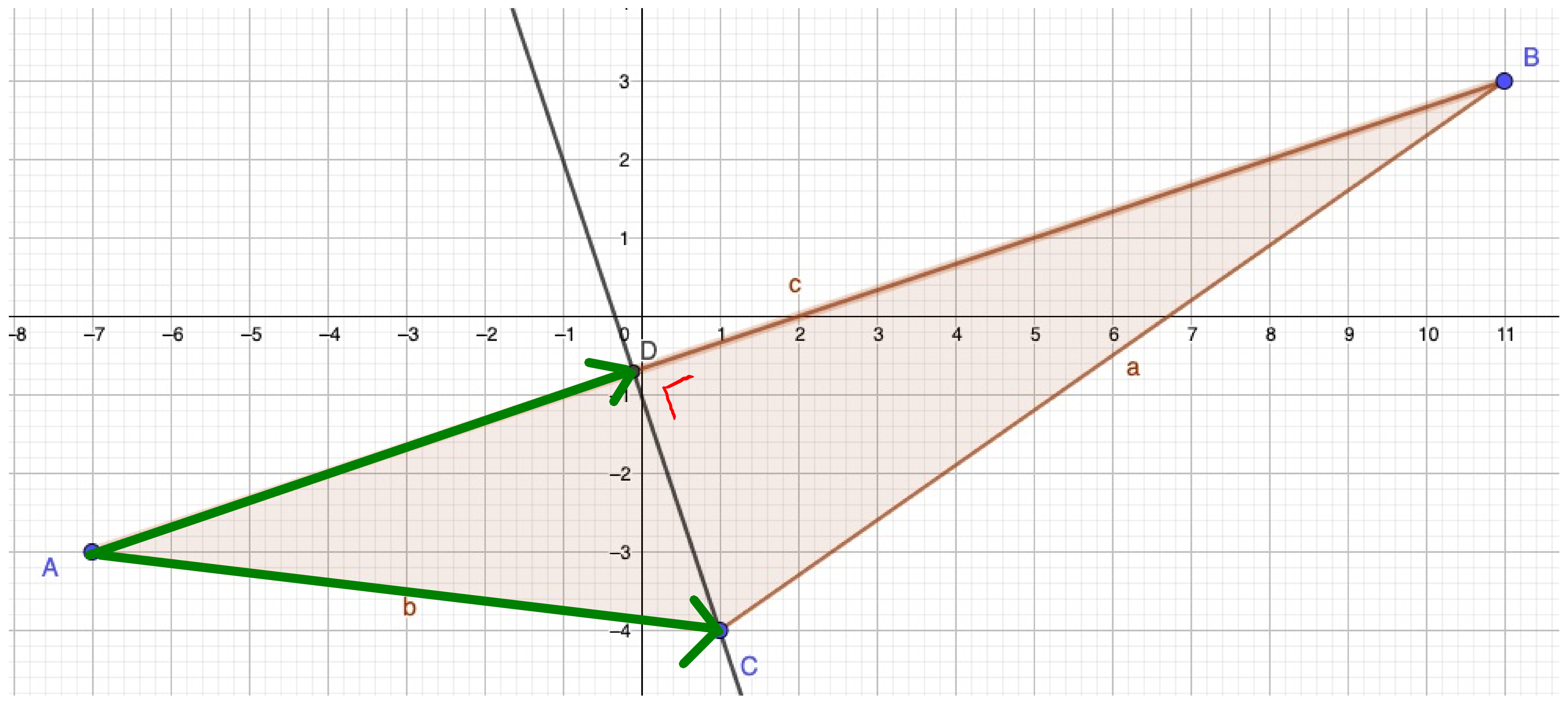
07.12.21

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.



$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} \qquad \text{pg } 47}$$

Déterminons la projection orthogonale du vecteur $\vec{AC}$ sur le vecteur $\vec{AB}$:

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On utilise la formule :

page 47

$$\vec{AD} = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}\cdot\vec{AB} = \frac{138}{360}\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{23}{60}\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{23}{\cancel{60}_{10}} \cdot \frac{\cancel{18}^{3}}{1} \\ \frac{23}{\cancel{60}_{10}} \cdot \frac{\cancel{6}^{1}}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{69}{10} \\ \frac{23}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}9 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = 8\cdot 18 + (-1)\cdot 6 = 144 - 6 = 138$$

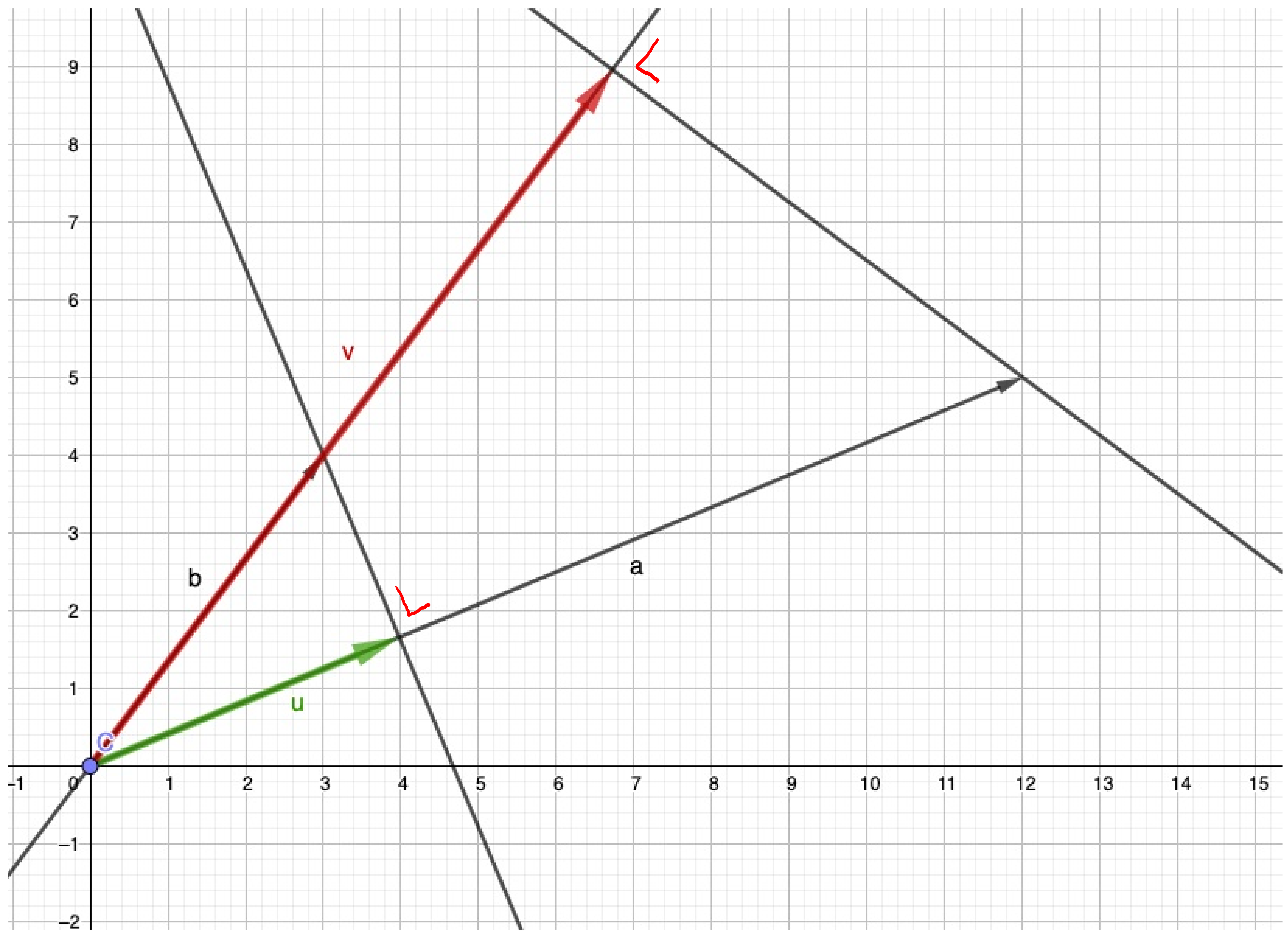
$$\|\vec{AB}\|^2 = 18^2 + 6^2 = 324 + 36 = 360$$

Finalement, on détermine les coordonnées du point D :

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6{,}9 \\ 2{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-0{,}1 ; -0{,}7)$$

1.4.22 – 1.4.23 – 1.4.24 – 1.4.25 – 1.4.28 – 1.4.31 – 1.4.32 – 1.4.33

1.4.23 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire la projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{a}'$ et $\vec{b}'$.

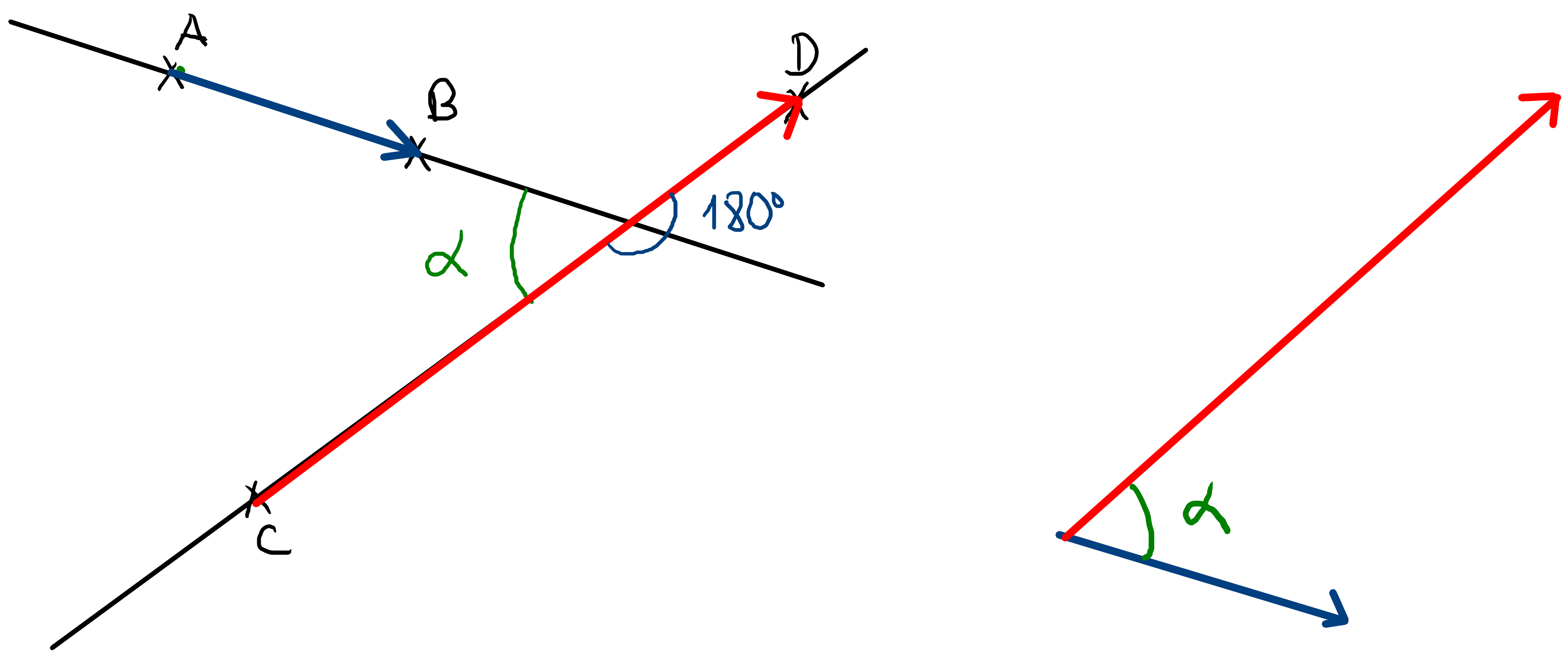


$\vec{a} \cdot \vec{b} = 36 + 20 = 56$

$\|\vec{b}\|^2 = 25$

projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$: $\vec{v} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = \dfrac{56}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,72 \\ 8,96 \end{pmatrix}$

1.4.28 Calculer l'angle aigu formé par les droites AB et CD, si $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.



Formule $\qquad \cos(\alpha) = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CD}\|}$

1) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 6 \cdot (-5) + (-2) \cdot 0 = -30$

4) $\|\vec{AB}\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

5) $\|\vec{CD}\| = 5$

6) $\cos(\alpha) = \dfrac{-30}{2\sqrt{10} \cdot 5} = \dfrac{\overset{-3}{\cancel{-30}}}{\underset{1}{\cancel{10}}\sqrt{10}} = \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-3}{\sqrt{10}}\right) \cong 161.57^\circ$

L'angle cherché : $\quad 180^\circ - 161,57^\circ = 18,43^\circ$