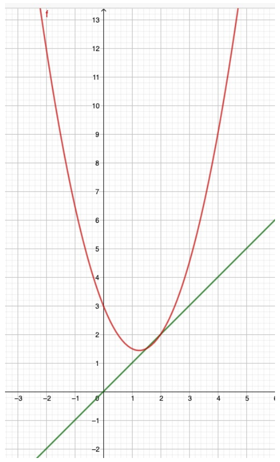
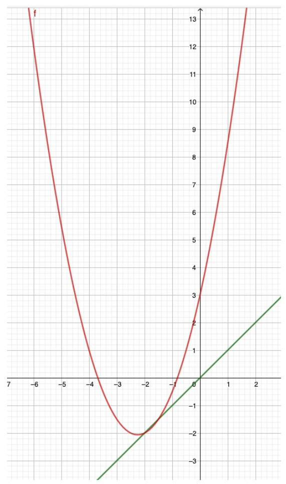
08.03.22

3.3.19 Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2 + mx + 3 = x$ a-t-elle exactement une solution ?

Posons $f(x) = x^2 + mx + 3$, $m \in \mathbb{R}$

$g(x) = x$





Geogebra montre l'existence de deux solutions.

$$x^2 + mx + 3 = x \quad \Big| -x$$

$$x^2 + mx - x + 3 = 0$$

$$\underbrace{x^2}_{a} + \underbrace{(m-1)}_{b}x + \underbrace{3}_{c} = 0$$

une solution $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$
$$= m^2 - 2m + 1 - 12$$
$$= m^2 - 2m - 11$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \Delta_\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 4 + 44 = 48$

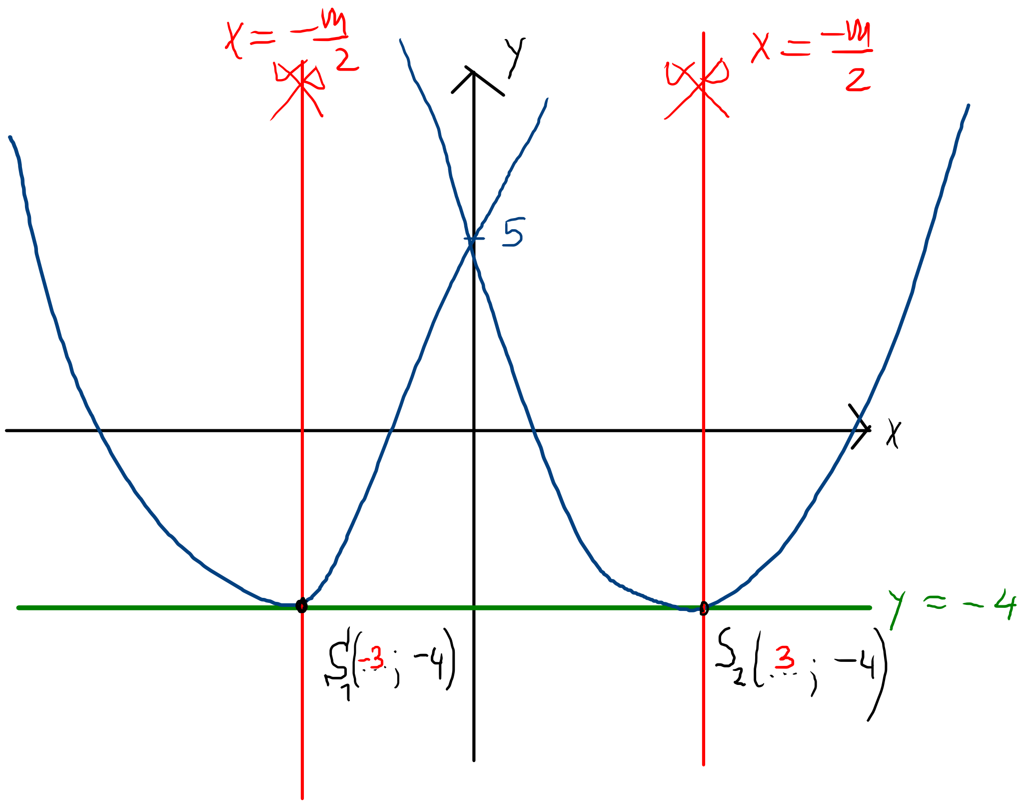
$$m_1 = \frac{2 - \sqrt{48}}{2} \qquad m_2 = \frac{2 + \sqrt{48}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1} - \cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} \qquad = \frac{\cancel{2}^{1} + \cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}}$$

$$= 1 - 2\sqrt{3} \qquad = 1 + 2\sqrt{3}$$

On obtient deux valeurs pour m : $1 - 2\sqrt{3}$ et $m = 1 + 2\sqrt{3}$

3.3.20 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + mx + 5$ est tangent à la droite d'équation $y = -4$.
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.



$f(x) = x^2 + mx + 5$

$x_S : x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-m}{2}$

Le sommet de la parabole est donné par $S\left(-\frac{m}{2}\,;-4\right)$

$S\left(-\frac{m}{2}\,;-4\right) \Rightarrow f\left(-\frac{m}{2}\right) = -4 \Rightarrow \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + m\left(\frac{-m}{2}\right) + 5 = -4$

CL

$$\frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} = -9$$

$$\frac{m^2}{4} - \frac{2m^2}{4} = -9$$

$$m^2 - 2m^2 = -36$$

$$-m^2 = -36$$

$$m^2 = 36$$

$$m = \pm 6$$

Ainsi $m = -6$ ou $m = 6$

On obtient les deux points $S(-3\,;-4)$ et $S(3\,;-4)$.

3.3.21 Établir le tableau des signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$

Commençons par trouver les zéros de $f(x)$. Pour cela, il faut factoriser l'expression $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

On utilise la méthode de Horner :

$f(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow x - 1 \,/\, f(x)$

	1	2	−1	−2
1		1	3	2
	1	3	2	0

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1)$
$= (x+1)(x+2)(x-1)$

Ainsi $\boxed{f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)}$

Il y a deux méthode pour faire le tableau des signes :

1ère méthode (rapide) :

x		−2		−1		1	
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$Z_f = \{1 ; -1 ; -2\}$

2ème méthode

x		−2		−1		1	
$x-1$	−		−		−	0	+
$x+1$	−		−	0	+		+
$x+2$	−	0	+		+		+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

1
−1
~~2~~

e) $f(x) = x\,(x+2)^2 \cdot (2-x^2) \cdot (x^2-1) \cdot (3-2\,x)$

$+$

$$= x\,(x+2)^2\,(\sqrt{2}-x)\,(\sqrt{2}+x)\,(x-1)\,(x+1)\,(3-2x)$$

$\cancel{0}$ $\cancel{-2}$ $\cancel{\sqrt{2}}$ $\cancel{-\sqrt{2}}$ $\cancel{1}$ $\cancel{-1}$ $\cancel{1{,}5}$

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$1{,}5$	
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
		d		s		s		s		s		s		s	

$3-2x = 0$

$-2x = -3$

$x = \frac{3}{2}$

$x = 1{,}5$

x		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		1.5	
x	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$\sqrt{2}-x$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\sqrt{2}+x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b) $f(x) = (x^3 - x^2 + x) \cdot (2 - x)$

$$f(x) = x(x^2 - x + 1)(2 - x)$$

Factorisons $x^2 - x + 1$:

Pour cela, résolvons $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Cette expression n'a pas de zéro !

x		0		2		
x	$-$	0	$+$		$+$	0
$x^2 - x + 1$	$+$		$+$		$+$	aucun
$2 - x$	$+$		$+$	0	$-$	2
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) d) Lundi 3.3.27