11.11.21

Colinéarité dans V_2

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple

$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} \parallel \vec{h}$: $6 \cdot 8 = (-4) \cdot (-12)$

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix} \iff m(m-1) = 3(m+4)$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} m(m-1) &= 3(m+4) && \text{CL} \\ m^2 - m &= 3m + 12 && -3m - 12 \\ m^2 - 4m - 12 &= 0 \\ (m-6)(m+2) &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ $m = 6$ $\qquad$ $\downarrow$ $m = -2$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

$m_1 = \frac{4-8}{2} = -2$

$m_2 = \frac{4+8}{2} = 6$

Ainsi : $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

a) $\vec{x} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = m \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7m \\ -2m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

b) $\vec{x} + \underbrace{\lambda \vec{b}}_{\begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}} = \vec{c} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7m \\ -2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) On résout le système :

$$\begin{pmatrix} 7m - 3\lambda \\ -2m + 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7m - 3\lambda = 0 \\ -2m + 5\lambda = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7m - 3\lambda = 0 \\ -2m + 5\lambda = 5 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \lambda \\ \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} m \\ \cdot 2 \\ \cdot 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} 29m = 15 \\ 29\lambda = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{29} \\ \lambda = \frac{35}{29} \end{cases}$$

Donc $\vec{x} = \frac{15}{29} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ -\frac{30}{29} \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{x} = \begin{pmatrix} 105/29 \\ -30/29 \end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{35}{29}$.

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme