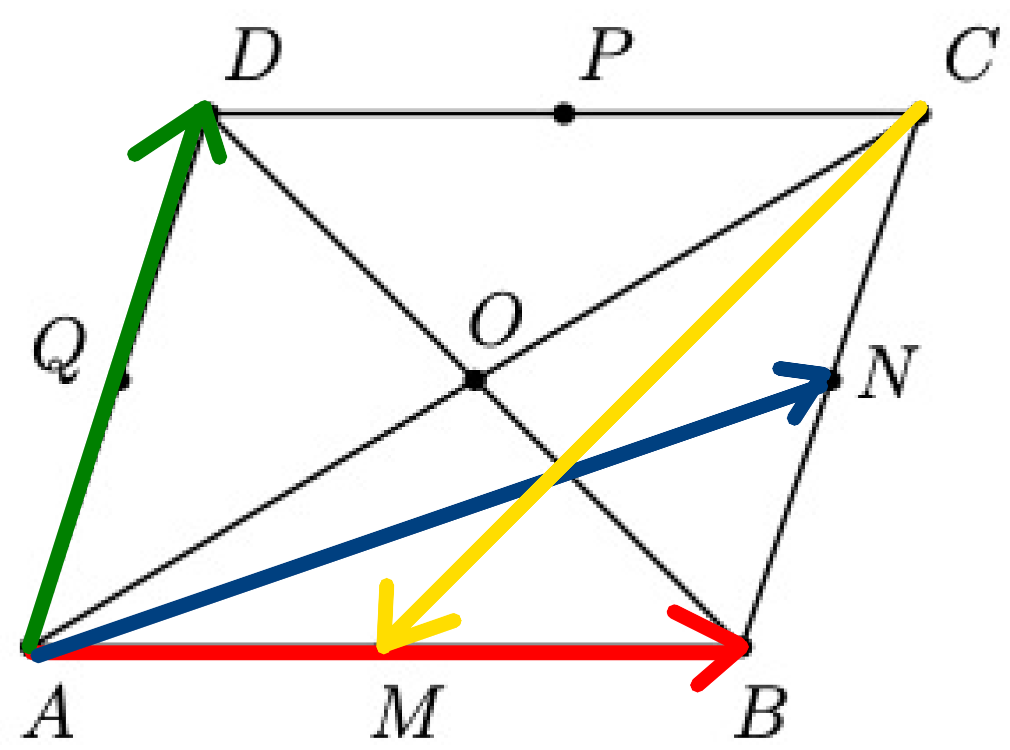
14.09.21

1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BN}}_{\overrightarrow{AQ}} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AQ}}_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

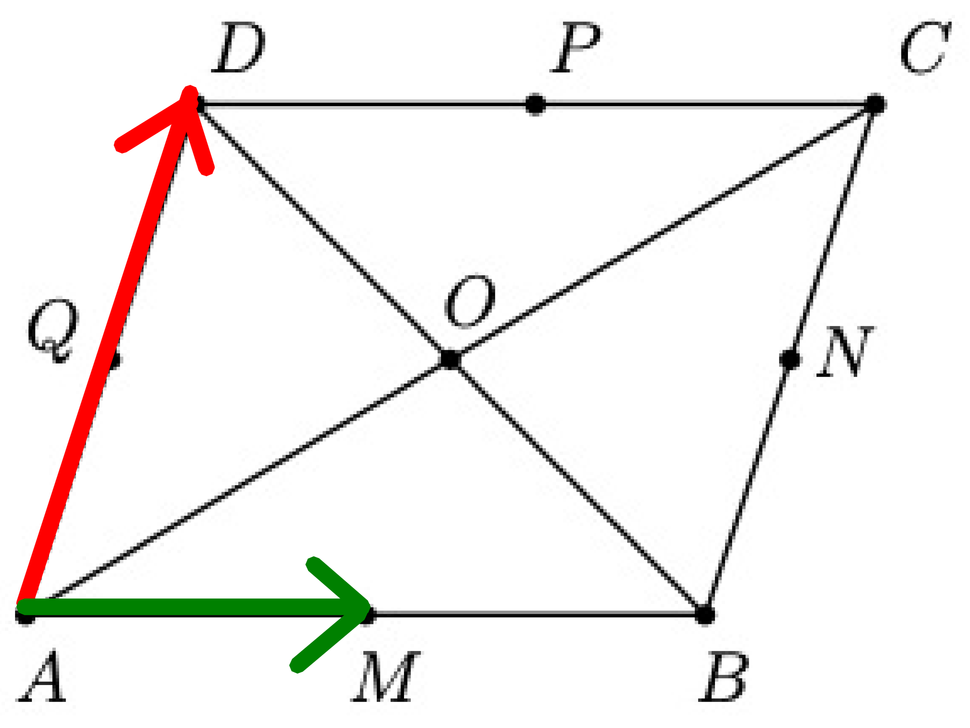
$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.

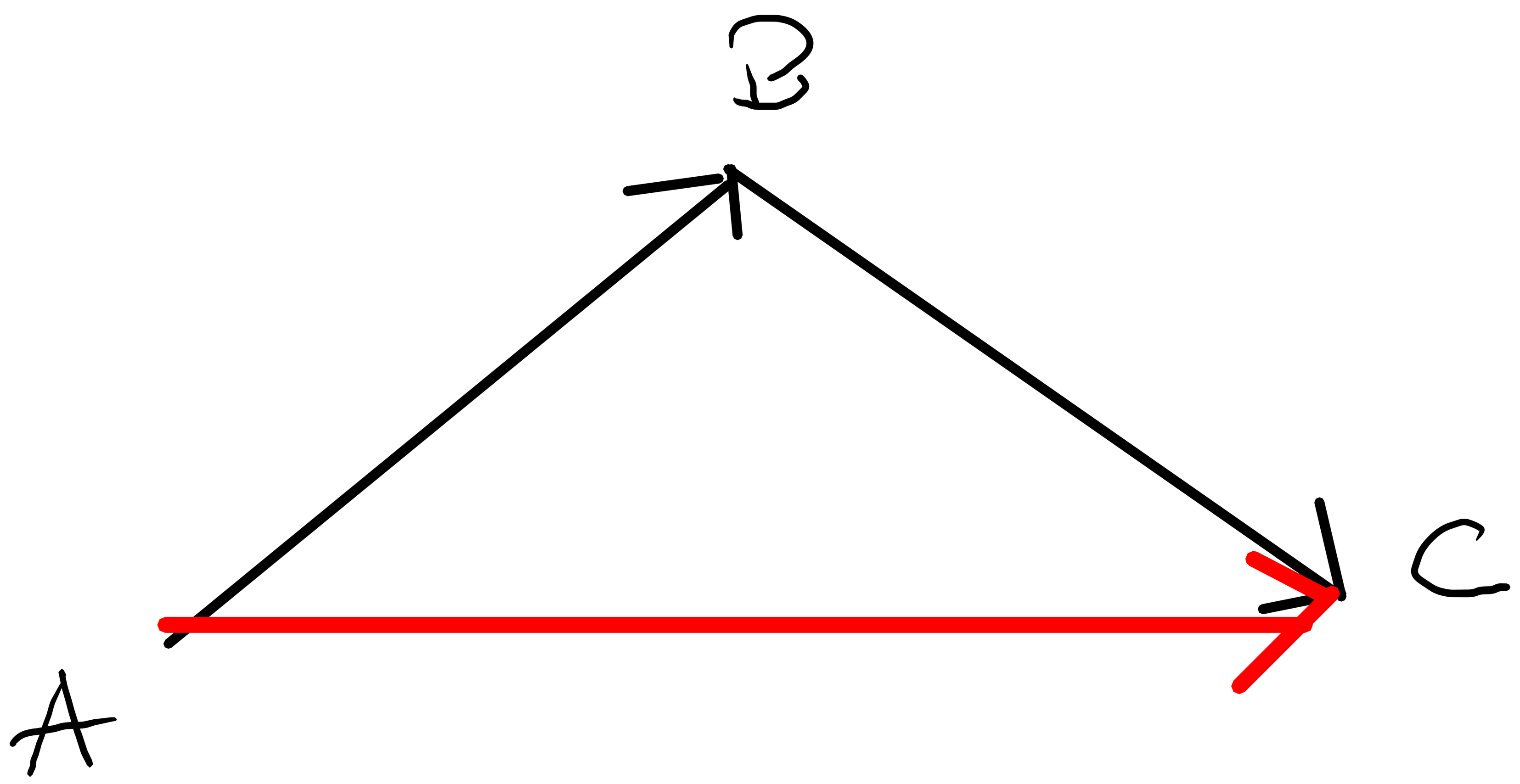


a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

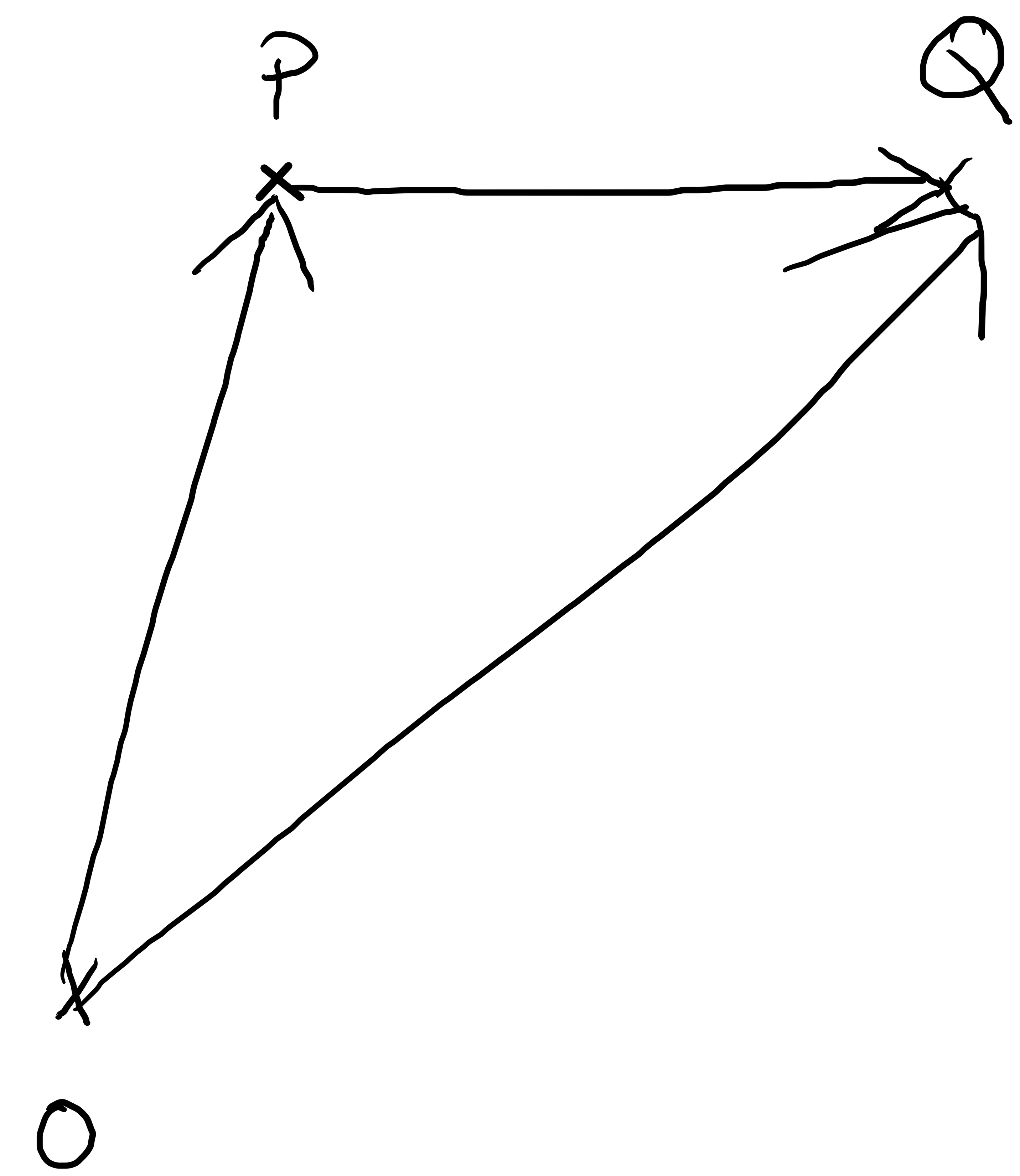
b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

a) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_1}$

b) $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_2}$

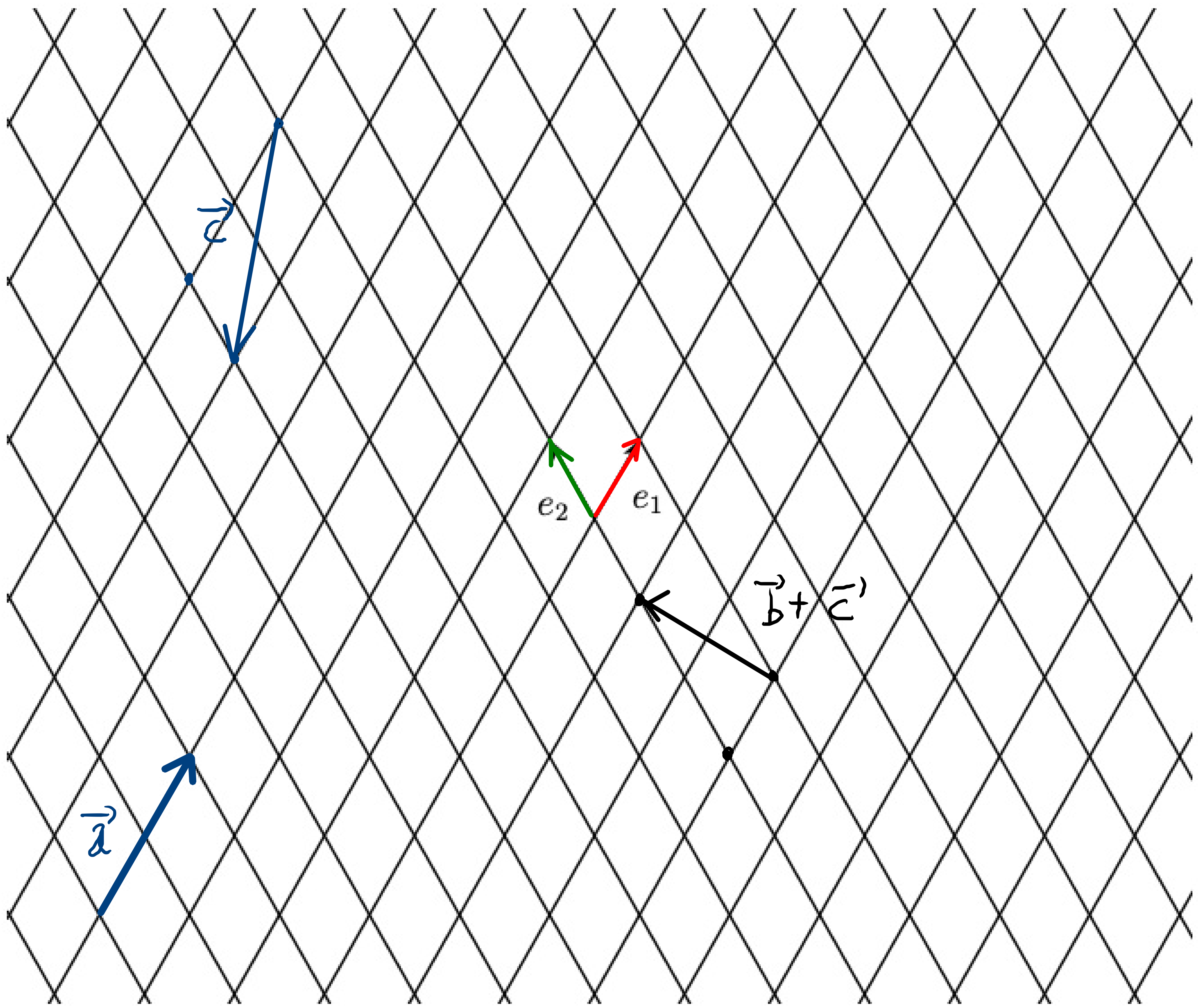


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = AC$$



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

1.2.7 On considère la figure suivante



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\vec{b} + 2\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

$$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{b} + 2\vec{c} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Addition de vecteurs avec les composantes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}}$$

Multiplication d'un vecteur avec un scalaire

(scalaire = nombre réel)

$$\boxed{\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a}; \vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Donc

$$\begin{array}{l|l|l} & \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \\ \left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{a} \\ 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 = \vec{b} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-1) \end{array} & \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1 = 3\vec{a} - \vec{b} \\ 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_2 = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1 = 3\vec{a} - \vec{b} \\ -\vec{e}_2 = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}\right. \Big| \cdot(-1) \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1 = 3\vec{a} - \vec{b} \\ \vec{e}_2 = -2\vec{a} + \vec{b} \end{array}\right.}$$

Donc $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

a) $$x\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x \\ 5x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y \\ -8y \\ 6y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16z \\ 10z \\ 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ d'où le système d'équations à trois inconnues:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 16z = 0 \\ 5x - 8y + 10z = 0 \\ 2x + 6y + 7z = 52 \end{cases} \left| \begin{array}{c} x \\ \cdot 5 \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} x \\ \cdot 2 \\ \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 15x + 20y - 80z = 0 \\ + & -15x + 24y - 30z = 0 \\ \hline & 44y - 110z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 6x + 8y - 32z = 0 \\ + & -6x - 18y - 21z = -156 \\ \hline & -10y - 53z = -156 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 44y - 110z = 0 \\ -10y - 53z = -156 \\ 2x + 6y + 7z = 52 \end{cases} \begin{array}{l} \mid \div 2 \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22y - 55z = 0 \\ 10y + 53z = 156 \\ 2x + 6y + 7z = 52 \end{cases} \left| \begin{array}{c} z \\ \cdot 53 \\ \cdot 55 \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} y \\ \cdot 5 \\ \cdot(-11) \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1716y = 8580 \\ -858z = -1716 \\ 2x + 6y + 7z = 56 \end{cases} \begin{array}{l} \mid \div 1716 \\ \mid \div 858 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \\ 2x + 30 + 14 = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v} = 6\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}}$$