Milieu d'un segment

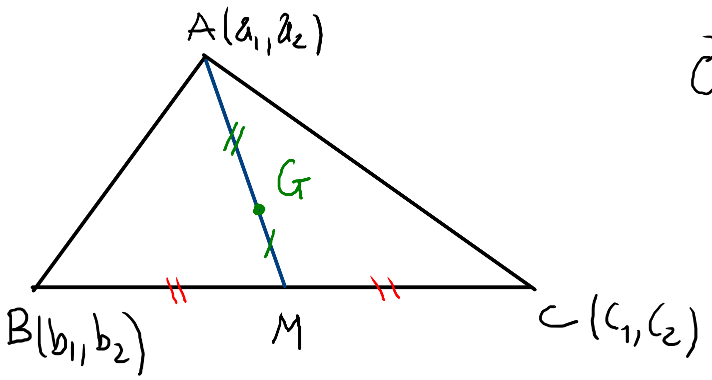
23.11.21

$A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$, le milieu $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

et $M\left(\frac{a_1+b_1}{2} ; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Exemple $A(4; -5)$ et $B(7; 12)$: $M\left(\frac{11}{2} ; \frac{7}{2}\right)$

Centre de gravité



$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

Donc $G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3} ; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

1.3.19 ; 1.3.21

1.3.19 Soit les points $A(-4; 2)$, $B(1; 3)$ et $C(2; 5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

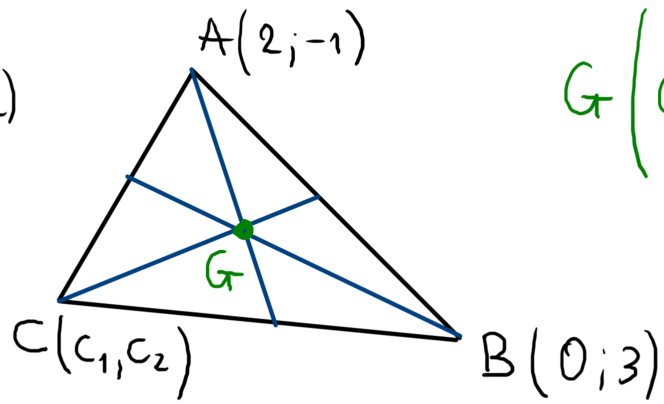
$G\left(-\frac{1}{3} ; \frac{10}{3}\right)$

1.3.21 On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

a)

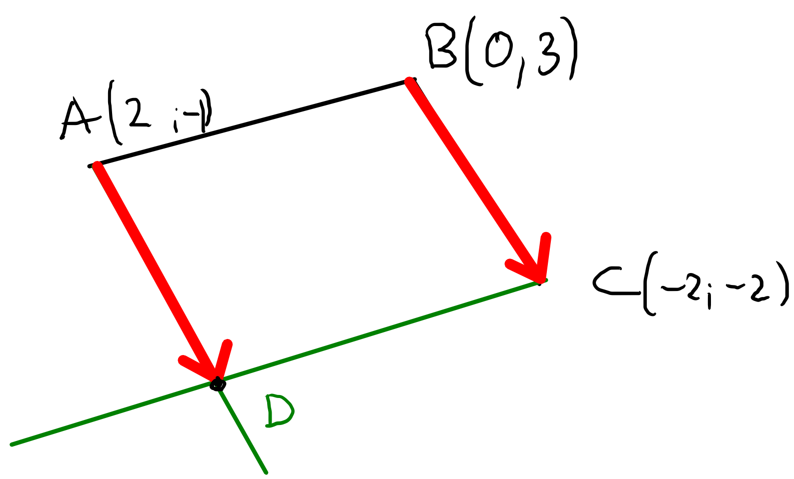


$$G(0;0) = O(0,0)$$

$$\left(\frac{2+0+c_1}{3} ; \frac{-1+3+c_2}{3}\right) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+c_1}{3} = 0 & \Rightarrow c_1 = -2 \\ \dfrac{2+c_2}{3} = 0 & \Rightarrow c_2 = -2 \end{cases}$$

On a $C(-2;-2)$

b)

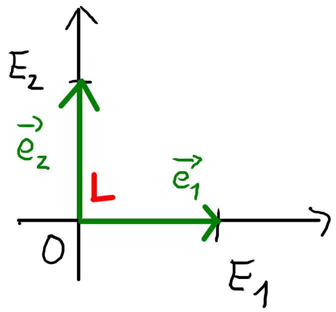


$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ \quad = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(0;-6)$$

Norme d'un vecteur

Depuis maintenant, nous travaillons dans un repère orthonormé.



$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$
$\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$

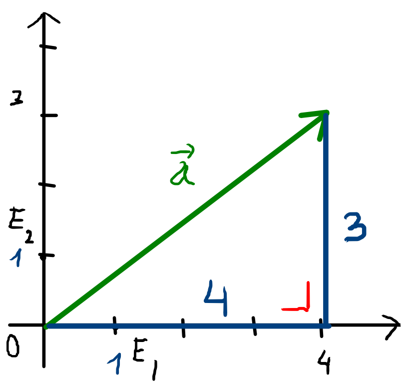
$$\begin{cases} \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \\ \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \end{cases}$$

où $\|\vec{e}_1\|$ est la norme (longueur) de $\vec{e}_1$

On dit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée.

Calculons la norme des vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$

et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$



$\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 3^2}$ par le théorème de Pythagore

$\|\vec{a}\| = 5$

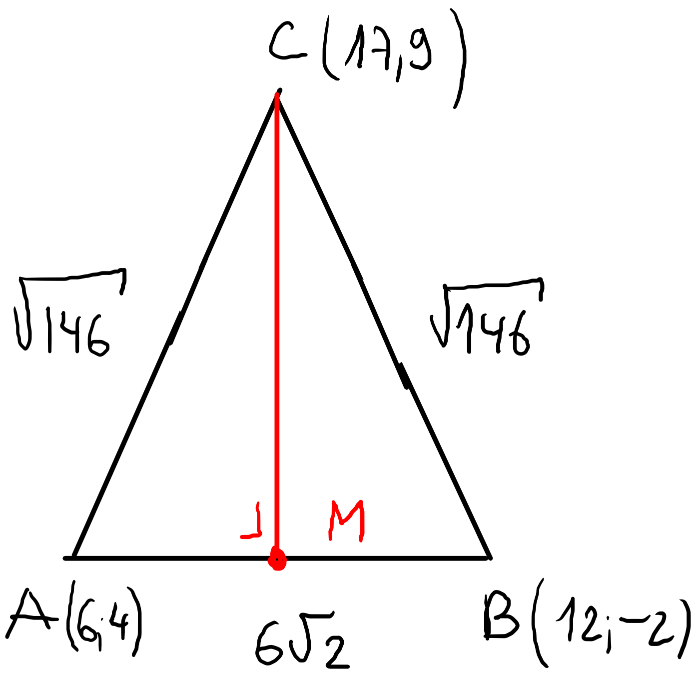
$\vec{b} = 7$

$\vec{c} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$

$\vec{d} = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

1.4.3 Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

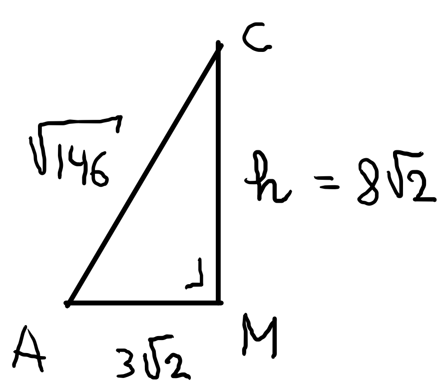


$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{AB}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{AC}\| = \sqrt{146}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{BC}\| = \sqrt{146}$$

Comme le ΔABC est isocèle en C, le milieu M est aussi le pied de la hauteur issue de C.



$$h = \sqrt{\left(\sqrt{146}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{146 - 18} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Aire du } \Delta ABC : \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} 6\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 48$$

1.4.4 → 1.4.7