

2.3.18 Factoriser :

c) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

Posons $p = 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

Déterminons, s'ils existent, les zéros de p , c'est-à-dire les nombres α tels que $p(\alpha) = 0$.

Les zéros rationnels (les fractions) de p apparaissent parmi les nombres suivants :

$\frac{u}{v}$ où u est un diviseur de 4 et v est un diviseur de 6

$$p = 6 \left(x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{23}{6}x^2 + \frac{20}{6}x - \frac{4}{6} \right)$$

$\pm 1; \pm \frac{2}{1}; \pm \frac{4}{1}; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{2}{2}; \pm \frac{4}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{4}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{2}{6}; \pm \frac{4}{6}$

Commençons avec les nombres entiers :

$x = 1 : p(1) = 6 - 5 - 23 + 20 - 4 = -6$

$x = -1 : p(-1) = 6 + 5 - 23 - 20 - 4 = -36$

$x = 2 : p(2) = 96 - 40 - 92 + 40 - 4 = 0 \Rightarrow x-2 / p$

$x = -2 : p(-2) = 96 + 40 - 92 - 40 - 4 = 0 \Rightarrow x+2 / p$

Nous avons deux zéros. Effectuons deux divisions par Horner

1) p par $x-2$:

	6	-5	-23	20	-4
2		12	14	-18	4
	6	7	-9	2	0

$$p = (x-2)(6x^3 + 7x^2 - 9x + 2) = (x-2) \cdot P_1$$

2) P_1 par $x+2$

	6	7	-9	2
-2		-12	10	-2
	6	-5	1	0

$$p = (x-2)(x+2)(6x^2 - 5x + 1)$$

3) Factorisons $6x^2 - 5x + 1$:

$$6x^2 - 5x + 1 = (3x-1)(2x-1)$$

Finalemment :

$$\begin{aligned} p &= 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4 \\ &= (x-2)(x+2)(3x-1)(2x-1) \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2 \right\}$$