

**Changement de base en dimension 2 – Série 1****Exercice 1**

Soit les bases suivantes :

— La base canonique :  $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

— Une deuxième base :  $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Soit le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  donné dans la base  $\mathcal{B}$ . Exprimer  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 2**

Soit les bases suivantes :

— La base canonique :  $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

— Une deuxième base :  $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

Soit le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$  donné dans la base  $\mathcal{B}$ . Exprimer  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Exercice 3**

Soit les bases suivantes :

— La base canonique :  $\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

— Une deuxième base :  $\mathcal{B}' = \left\{ \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right\}$ .

Soit le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$  donné dans la base  $\mathcal{B}$ . Exprimer  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

## Solutions

### Exercice 1

Pour exprimer  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , il faut trouver les scalaires  $a$  et  $b$  tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

En résolvant ce système :

— En additionnant les deux équations :  $(a + b) + (a - b) = 2 + 3 \implies 2a = 5 \implies a = \frac{5}{2}$ .

— En substituant  $a = \frac{5}{2}$  dans la première équation :  $\frac{5}{2} + b = 2 \implies b = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$ .

Ainsi, les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

### Exercice 2

Pour exprimer  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , il faut trouver les scalaires  $a$  et  $b$  tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$$

**Résolution du système** - À partir de la première équation :  $b = 7 - 2a$ . - Remplaçons cette expression dans la deuxième équation :

$$3a + 2(7 - 2a) = 10$$

Ce qui donne :

$$3a + 14 - 4a = 10 \implies -a = -4 \implies a = 4.$$

- En remplaçant  $a = 4$  dans  $b = 7 - 2a$ , on trouve :

$$b = 7 - 2 \times 4 = 7 - 8 = -1.$$

Ainsi, les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

### Exercice 3

Pour exprimer  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , il faut trouver les scalaires  $a$  et  $b$  tels que :

$$\vec{v} = a\vec{f}_1 + b\vec{f}_2$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{2b}{3} = \frac{7}{6} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Pour simplifier les équations :

- Multiplions la première équation par 6 pour éliminer les dénominateurs :  $3a + 4b = 7$ .
- Multiplions la deuxième équation par 6 également :  $2a + b = 5$ .

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} 3a + 4b = 7 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

### Résolution du système

- À partir de la deuxième équation :  $b = 5 - 2a$ . - Remplaçons cette expression dans la première équation :

$$3a + 4(5 - 2a) = 7$$

Ce qui donne :

$$3a + 20 - 8a = 7 \quad \Rightarrow \quad -5a = -13 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{5}.$$

- En remplaçant  $a = \frac{13}{5}$  dans  $b = 5 - 2a$ , on trouve :

$$b = 5 - 2 \times \frac{13}{5} = 5 - \frac{26}{5} = \frac{25}{5} - \frac{26}{5} = -\frac{1}{5}.$$

Ainsi, les coordonnées de  $\vec{v}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  sont :

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$