

Algèbre II – TE 822B

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	4	6	5	4	6	25
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)

Effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme D donnés ci-dessous.

$$P = 6x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 9x + 9 \quad \text{et} \quad D = 2x^2 - x + 5$$

Écrire ensuite l'égalité fondamentale.

Handwritten polynomial long division on grid paper:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x^2 - x + 5 \\
 \underline{6x^4 - 3x^3 + 15x^2} \\
 -4x^3 + 6x^2 - 9x \\
 \underline{-4x^3 + 2x - 10x} \\
 4x^2 + x + 9 \\
 \underline{4x^2 - 2x + 10} \\
 3x - 1
 \end{array}$$

Final result:

$$P = (3x^2 - 2x + 2) \cdot D + (3x - 1)$$

Problème 2 (6 points)

Factoriser le polynôme $P = 2x^4 - 15x^3 - 71x^2 + 414x + 720$ sachant que

- $P(-5) = 0 \Rightarrow x+5 / P$
- $x = 8$ est une solution de l'équation $P(x) = 0 \Rightarrow x-8 / P$

Par Horner:

	2	-15	-71	414	720
$\begin{matrix} \nearrow \\ -5 \end{matrix}$		-10	125	-270	-720
<hr/>					
	2	-25	54	144	

	2	-25	54	144
$\begin{matrix} \nearrow \\ 8 \end{matrix}$		16	-72	144
<hr/>				
	2	-9	-18	0

$$P = (x+5)(x-8)(2x^2 - 9x - 18)$$

$$P = (x+5)(x-8)(2x+3)(x-6)$$

Problème 3 (5 points)

Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que

- P est divisible par $x - 3$
- le reste de la division de P par $x + 2$ est égal à -20
- $P(4) = 16$

$$\Rightarrow P(-2) = -20$$

$$P = (x-3)(ax+b)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(-2) = -5(-2a+b) \\ P(4) = 4a+b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 10a - 5b = -20 \quad | :5 \\ 4a + b = 16 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = -4 \\ 4a + b = 16 \end{array} \right. \begin{array}{c} | \\ \cdot 1 \\ | \\ \cdot 1 \end{array} \begin{array}{c} b \\ | \\ a \end{array} \begin{array}{c} | \\ \cdot (-2) \\ | \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6a = 12 \\ 3b = 24 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 8 \end{array} \right.$$

$$\underline{P = (x-3)(2x+8) = 2x^2 + 2x - 24}$$

Problème 4 (4 points)

Effectuer et réduire :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 16} \cdot \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$4(x^2 - 4)$$

$$\frac{\cancel{(x-1)} \cancel{(x-2)}}{4 \cancel{(x-2)} \cancel{(x+2)}} \cdot \frac{(2x-1) \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x-1)}} = \frac{2x-1}{4(x-1)}$$

Problème 5 (6 points)

Effectuer et réduire :

$$\frac{x-3}{x^2+6x+8} - \frac{x-2}{x^2+7x+12} + \frac{5}{x^2+5x+6}$$

Recherche du ppmc :

$$x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$$

$$x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$\text{ppmc: } (x+2)(x+3)(x+4)$$

$$* = \frac{(x-3)(x+3) - (x-2)(x+2) + 5(x+4)}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{x^2-9 - x^2+4 + 5x+20}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{5x+15}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$= \frac{5(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{5}{(x+2)(x+4)}$$