12.11.24

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

$$P = ax^2 + bx + c$$

Il faut déterminer a, b et c

$P(1) = a + b + c = -2$

$P(-2) = a \cdot (-2)^2 + b(-2) + c = 4a - 2b + c = 3$

$P(0) = c = -1$

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 4a - 2b + c = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 1 = -2 \\ 4a - 2b - 1 = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \begin{array}{c|c|c} & b & a \\ & \cdot 2 & \cdot 4 \\ & \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 2 \\ 6b = -8 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \\ c = -1 \end{cases}$$

Finalement : $\underline{P = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1}$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

Le reste de la division de a par b est un nombre

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -10x^2 & +11x & -5 & x-1 \\ \cline{5-5}
-\;\; 4x^3 & -4x^2 & & & 4x^2 - 6x + 5 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & +11x & & \\
- & -6x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x & -5 & \\
 & - & 5x & -5 & \\ \cline{3-4}
 & & \text{reste :} & 0 &
\end{array}
$$

$$4x^3 - 10x^2 + 11x - 5 = \left(4x^2 - 6x + 5\right)\left(x - 1\right) + 0$$

$$a(x) = q(x) \cdot b(x)$$

$$a(1) = q(1) \cdot b(1)$$

$$0 = 3 \cdot 0 + 0$$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 9x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 & x+2 \\
\cline{3-3}
- & \underline{9x^4 + 18x^3} & \underbrace{9x^3 - 17x^2 + 33x - 65}_{q(x)} \\
 & -17x^3 - x^2 & \\
- & \underline{-17x^3 - 34x^2} & \\
 & 33x^2 + x & \\
- & \underline{33x^2 + 66x} & \\
 & -65x + 2 & \\
- & \underline{-65x - 130} & \\
 & \boxed{\text{reste : } 132} &
\end{array}
$$

$$a(x) = q(x)\cdot(x+2) + 132$$

$$a(-2) = \underbrace{q(-2)(-2+2)}_{=0} + 132$$

Le reste de la division de a par $(x+2)$ est égal à $a(-2)$

$$\boxed{a(-2)} = 9\cdot(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 2$$

$$= 9\cdot 16 - 8 - 4 - 2 + 2 = 144 - 8 - 4 - 2 + 2 \boxed{= 132}$$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \quad B(x) = x - 3$

$$A(x) = \underbrace{Q(x) \cdot (x-3)} + \underbrace{\text{reste}}_{\text{nombre}}$$

$$A(3) = 0 + \text{reste}$$

$$A(3) = 2 \cdot 27 - 9 + 15 - 1 = 54 - 9 + 15 - 1 = 59 \text{ est le reste}$$

↑

3 est le zéro $B(x) = x - 3$

2.3.8

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

Le reste : $a(-2) =$

b) $A(x) = x^4 - x + 1 \qquad B(x) = x + 2$

$A(-2) = 19 \Rightarrow x + 2$ ne divise pas $x^4 - x + 1$

c) $A(x) = x^3 - 27 \qquad B(x) = x - 3$

$A(3) = 0 \Rightarrow (x-3) \mid x^3 - 27$

2.3.10 Déterminer les quotients des divisions exactes.

a) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) \div [(x-2)(x+1)]$

b) $(9\,x^4 + 9\,x^3 - 7\,x^2 - 9\,x - 2) \div [(x+1)(3\,x+1)]$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

a) $x-1$ b) $x+4$ c) $x+\dfrac{1}{2}$ d) $x+1$ e) $x+5$ f) $x-3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.