28.08.24

Les polynômes

On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes en x

$$p = \underbrace{3x^8}_{\text{monôme}} - 12x^3 + 8$$

3 est le coefficient du monôme $3x^8$

Le degré d'un polynôme est le degré du monôme qui a la plus grande puissance

Ici, le degré de p est égal à 8. On note $\deg(p) = 8$

Le coefficient 3 s'appelle le coefficient dominant de p.

Ex : $P_1 = 5x^4 - 3x^7 + 12x - 1$

$\deg(P_1) = 7$ et le coefficient dominant vaut -3

$P_2 = 4x + 8$

$\deg(P_2) = 1$, le coefficient dominant vaut 4

$P_3 = -7$

$\deg(P_3) = 0$

$P_4 = 0$

$\deg(P_4) = -\infty$ par convention

Notation

$$p \in \mathbb{R}[X] \qquad (\text{"}\in\text{" appartient à})$$

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

où $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$

a	A
b	B
c	C
p	P

$$p = -3X^2 + 7X + 2$$

$\deg(p) = 2$

$a_2 = -3 \quad a_1 = 7 \quad a_0 = 2$

$$q = X^{12} - 1$$

$a_{12} = 1, \quad a_{11} = \dots = a_1 = 0, \quad a_0 = -1$

2.1.6 Soit $p(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1$ et $q(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2$. Déterminer

a) le polynôme $p + q$

b) le degré du polynôme $p \cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

a) $p + q = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 1 + 3\,x^3 + 2\,x^2 - 4\,x + 2 = 5x^3 - x^2 + x + 1$

b)

	$2x^3$	$-3x^2$	$5x$	-1
$3x^3$	$6x^6$		$15x^4$	
$2x^2$		$-6x^4$		
$-4x$	$-8x^4$			
2				

le degré du polynôme $p \cdot q$ vaut 6

le coefficient de son terme de degré 4 vaut $(-8 - 6 + 15) = 1$

2.1.8 Soit les polynômes

$a(x) = 3x^2 - 4x + 3$, $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 17$ et $q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 18$

a) calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$
b) calculer $p - q$
c) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$
d) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 7
e) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 4

a) $(3x^2 - 4x + 3)^2 = 9x^4 - 24x^3 + 34x^2 - 24x + 9$

$\cdot$	$3x^2$	$-4x$	3
$3x^2$	$9x^4$	$-12x^3$	$9x^2$
$-4x$	$-12x^3$	$16x^2$	$-12x$
3	$9x^2$	$-12x$	9

$(3x^2 - 4x + 3)(3x^2 - 4x + 3) =$

etc

c) $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$

$= 3 + 4 = 7$

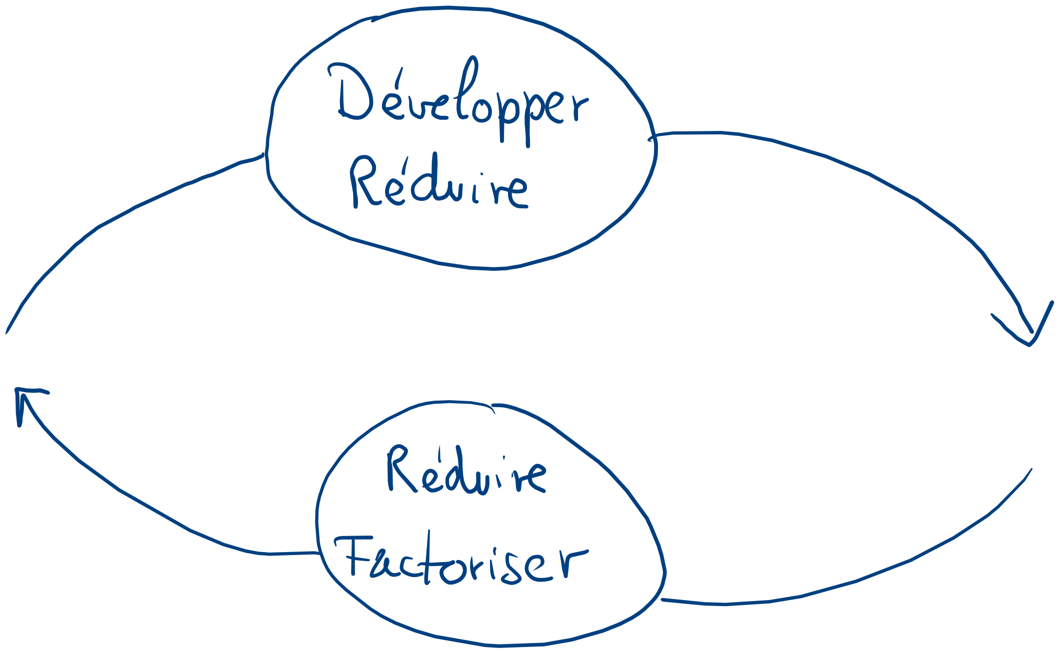
d) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 17$ et $q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 18$

coefficient : $1 \cdot 2 = 2$

e) $p(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 17$ et $q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 18$

coefficient de degré 4 : $18 - 10 + 6 - 8 = 6$

Factoriser une expression



1ère méthode : La mise en évidence

2.2.1 Factoriser :

a) $xy + y = y(x+1)$

b) $ma + ap$

c) $a^3x^2 - a^2x^3 = a^2x^2(a - x)$

d) $4uv - 2uw = 2u(2v - w)$

e) $6a^2 + 4ab = 2a(3a + 2b)$

f) $24y^3z^5 - 36yz^2$

g) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2 = 2yz^2(z^3 + 4yz^2 + 3y^2z - y^3)$

h) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$

2.2.1

i) $3a^2bc^2 - abc^3$ $= abc^2(3a - c)$

j) $(2a+3b)(2x+y) + (3a+5b)(2x+y)$ $= (2x+y)\left[(2a+3b) + (3a+5b)\right] = (2x+y)(5a+8b)$

k) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$ $= ab^3c^2(3bc - 1)$

l) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$

m) $(x-3)(x+1) + 2(x-3)^2 - (x-3)$ $= (x-3)\left[(x+1) + 2(x-3) - 1\right] = (x-3)(x+1+2x-6-1)$

$= (x-3)(3x-6)$

$= 3(x-3)(x-2)$

n) $(u+v)^3 - (u+v)^2$

o) $2a(a-b) - (a-b)^2$ $= (a-b)\left[2a - (a-b)\right]$

$= (a-b)(2a - a + b)$

$= (a-b)(a+b)$

2.2.2 Factoriser :

a) $a^2b^2 - m^2 = (ab)^2 - m^2 = (ab-m)(ab+m)$

b) $x^4 - y^2$

c) $a^2 - \frac{1}{16} = a^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$

d) $(a+b)^2 - x^2$

e) $(ax+2y)^2 - (2x-3y)^2 = \big((ax+2y)-(2x-3y)\big)\big((ax+2y)+(2x-3y)\big)$

f) $(a-b)^2 - 1$

$= (ax+2y-2x+3y)(ax+2y+2x-3y)$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

$= (ax-2x+5y)(ax+2x-y)$

g) $3a^2 - 3 = 3(a^2-1) = 3(a-1)(a+1)$

h) $4x^5y^2 - 9x^3 = x^3(4x^2y^2-9) = x^3\left((2xy)^2-3^2\right)$

$= x^3(2xy-3)(2xy+3)$

i) $a^4 - b^4$

j) $a^5 - a$

k) $\frac{u^4}{625} - \frac{v^4}{81} = \left(\frac{u^2}{25}\right)^2 - \left(\frac{v^2}{9}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{25}-\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)$

$= \left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\underbrace{\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)}_{\text{pas factorisable}}$

2.2.2

l) $x^5y^4 - x = x(x^4y^4 - 1) = x((x^2y^2)^2 - 1) = x(x^2y^2 - 1)\overbrace{(x^2y^2 + 1)}^{\text{pas factorisable}}$

$= x(xy-1)(xy+1)(x^2y^2+1)$

m) $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$

n) $1 + 2x^2 + x^4 = (1 + x^2)^2$

p) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y = 9x^4 + 24x^2y + 16y^2 = (3x^2 + 4y)^2$

q) $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

s) $(\underbrace{a+b}_{A})^2 - 2(\underbrace{a+b}_{A})\underbrace{c}_{B} + \underbrace{c^2}_{B} = ((a+b) - c)^2 = (a + b - c)^2$

t) $5x^2 - 10x + 5 = 5(x^2 - 2x + 1) = 5(x - 1)^2$

u) $x^2(a+b) + 2(a+b)x + (a+b) = (a+b)[x^2 + 2x + 1] = (a+b)(x+1)^2$

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$$

s) $(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2 = (a + b - c)^2$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Les formules du cube

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

2.2.3

a) $x^{12} - 125 = (x^4)^3 - 5^3 = (x^4 - 5)(x^8 + 5x^4 + 25)$

b) $a^4 - \frac{8ab^3}{27} = a\left(a^3 - \frac{8b^3}{27}\right) = a\left(a^3 - \left(\frac{2b}{3}\right)^3\right)$

$$= a\left(a - \frac{2b}{3}\right)\left(a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{4b^2}{9}\right)$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Mardi $\rightarrow$ 2.2.3