1.4.14 On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\vec{a} \cdot \left(7\vec{b} + \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b}$

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \cdot \vec{d}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{d}\right)$

e) $\|\vec{d}\| \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

f) $\underbrace{\vec{a}}_{\text{vecteur}} + \left(\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{\text{nombre}}\right)$ ⚠

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 35 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 42 + 4 \cdot (-6) = 102$

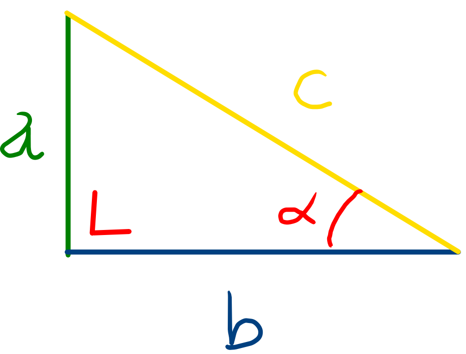
b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b} = \left(3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1)\right) \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ -11 \end{pmatrix}$

c) $\left(3 \cdot 5 + 4(-1)\right) + \left(7 \cdot 0 + 1 \cdot 3\right) = 11 + 3 = 14$

d) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 56 - 6 = 50$

e) $3 \cdot \left(3 \cdot 0 + 4 \cdot 3\right) = 36$

Trigonométrie dans le triangle rectangle



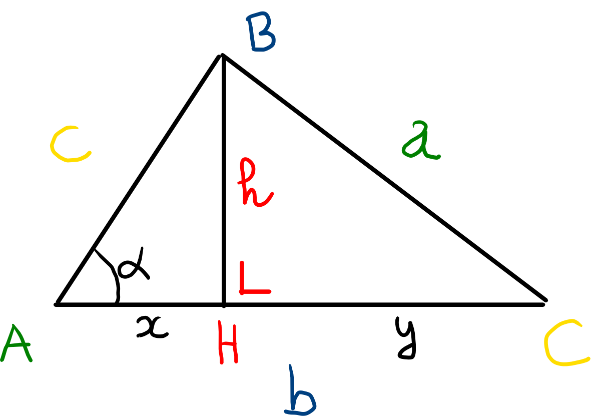
Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \end{aligned}}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Théorème du cosinus (théorème de Pythagore généralisé)



Posons

$AH = x$
$HC = y$ $\Big\}$ $x + y = b$

1) $b = x + y \Rightarrow y = b - x$

2) Pythagore : $a^2 = h^2 + y^2 = h^2 + (b-x)^2$

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

3) $\cos(\alpha) = \frac{x}{c}$ $\quad\Delta AHB$ $\quad 3 = \frac{6}{2}$

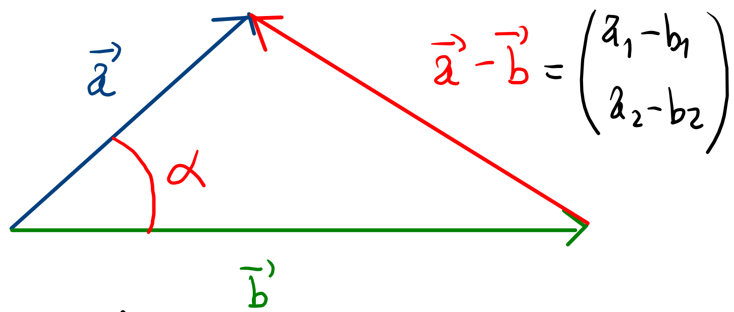
donc $x = c \cdot \cos(\alpha)$

4) Reprenons 2) : $a^2 = h^2 + b^2 - 2bc\cos(\alpha) + x^2$

$$a^2 = (h^2 + x^2) + b^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Théorème du cosinus : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$

Angle entre deux vecteurs



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Utilisons le théorème de cosinus :

$$(*) \quad \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2$$

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$*$ devient :

$$a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$-2\,(\underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2}) = -2\,\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}}$$