

Algèbre I – TE 783B

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	6	6	9	4	6	6	37
Points obtenus							

Problème 1 (6 points)

Soit les polynômes

$a(x) = 2x^2 - 7x + 1$, $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 2$ et $q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 8$

- a) Calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$.
- b) Calculer $p(x) - q(x)$.
- c) Déterminer le degré du polynôme $p(x) \cdot q(x)$.
- d) Déterminer le coefficient du polynôme $p(x) \cdot q(x)$ de degré 6.

2

a) $(2x^2 - 7x + 1)^2 = 4x^4 + 49x^2 + 1 - 28x^3 + 4x^2 - 14x$
 $= 4x^4 - 28x^3 + 53x^2 - 14x + 1$

1

b) $p(x) - q(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

1

c) $\deg(p \cdot q) = 4 + 3 = 7$

2

d) $(1 \cdot 5 + (-3)(-2))x^6 = 11x^6$
c'est 11

Problème 2 (6 points)

Réduire au maximum les expressions suivantes.

a) $\left(a - \frac{b}{3}\right) \left(\frac{4a}{3} + \frac{5b}{6}\right) - \left(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} & \frac{4a^2}{3} + \frac{5ab}{6} - \frac{4ab}{9} - \frac{5b^2}{18} - \left(\frac{4a^2}{9} - 2ab + \frac{9b^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{36} (48a^2 + 30ab - 16ab - 10b^2 - 16a^2 + 72ab - 81b^2) \\ &= \frac{1}{36} (32a^2 + 86ab - 91b^2) \end{aligned}$$

3

b) $(3x - 2y)^2 - (4x + 5y)^2 - 2(x - 2y)(3x - 5y)$

$$\begin{aligned} & 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 16x^2 - 40xy - 25y^2 \\ & \quad - 2(3x^2 - 11xy + 10y^2) \\ &= -13x^2 - 30xy - 41y^2 \end{aligned}$$

3

Problème 3 (9 points)

Factoriser complètement les expressions suivantes.

a) $16x^2(7x - y) - 9(7x - y)$

2

$$(7x - y)(16x^2 - 9) = (7x - y)(4x - 3)(4x + 3)$$

b) $2a^7b^2 - 6a^6b^3 + 6a^5b^4 - 2a^4b^5$

2

$$2a^4b^2(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$$

$$= 2a^4b^2(a - b)^3$$

c) $a^4 - 2a^3 + 2a - 1$

3

$$\begin{aligned} a^4 - 1 - 2a(a^2 - 1) &= (a^2 - 1)(a^2 + 1) - 2a(a^2 - 1) \\ &= (a^2 - 1)(a^2 + 1 - 2a) = (a - 1)(a + 1)(a - 1)^2 \\ &= (a + 1)(a - 1)^3 \end{aligned}$$

d) $125 + 216a^3$

$$5^3 + (6a)^3 = (6a + 5)(36a^2 - 30a + 25)$$

Problème 4 (4 points)

Effectuer la division euclidienne du polynôme $L(x)$ par le polynôme $M(x)$.

$$L(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 2 \qquad M(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

Écrire ensuite l'égalité fondamentale.

Handwritten polynomial long division on grid paper:

Dividing $L(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 2$ by $M(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

Quotient: $x^3 - x + 1$

Remainder: $5x - 1$

FF: $L(x) = (3x^2 - 2x + 3)(x^3 - x + 1) + 5x - 1$

Problème 5 (6 points)Factoriser entièrement le polynôme $A(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 11x + 6$.Les zéros de A se trouvent parmi les diviseurs de 6.

$$A(1) = 1 - 6 + 12 - 11 + 6 \neq 0$$

$$A(-1) = 1 + 6 + 12 + 11 + 6 \neq 0$$

$$A(2) = 16 - 48 + 48 - 22 + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)/A$$

Horner:

2 ↗	1	-6	12	-11	6
		2	-8	8	-6
	1	-4	4	-3	0

$$A(x) = (x-2)(x^3 - 4x^2 + 4x - 3)$$

$A_1(x)$

$$A_1(3) = 27 - 36 + 12 - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)/A_1$$

Horner :

3 ↗	1	-4	4	-3
		3	-3	3
	1	-1	1	0

$$A(x) = (x-2)(x-3)(x^2 - x + 1)$$

Vérif : $x^2 - x + 1 = 0$: $\Delta < 0$ pas factorisable

$$\text{Ainsi } A(x) = (x-2)(x-3)(x^2 - x + 1)$$

Problème 6 (6 points)Déterminer un polynôme $Q(x)$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1 $Q(x)$ est de degré 4
- 2 $Q(x)$ est unitaire
- 3 $Q(x)$ est divisible par $x + 2$
- 4 $Q(0) = 40$
- 5 4 est un zéro de $Q(x)$
- 6 la division de $Q(x)$ par $x - 1$ donne un reste égal à 72.

3) $(x+2) \mid Q$

5) $(x-4) \mid Q$

2 1) + 2) $Q(x) = (x+2)(x-4)(x^2 + bx + c)$

1 4) $Q(0) = 40 \Rightarrow 2 \cdot (-4) \cdot c = 40$
 $c = -5$

2 6) $Q(1) = 72 \Rightarrow 3 \cdot (-3)(1+b-5) = 72$
 $b-4 = -8$
 $b = -4$

1 Ainsi $Q(x) = (x+2)(x-4)(x^2 - 4x - 5)$
 $= x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40$