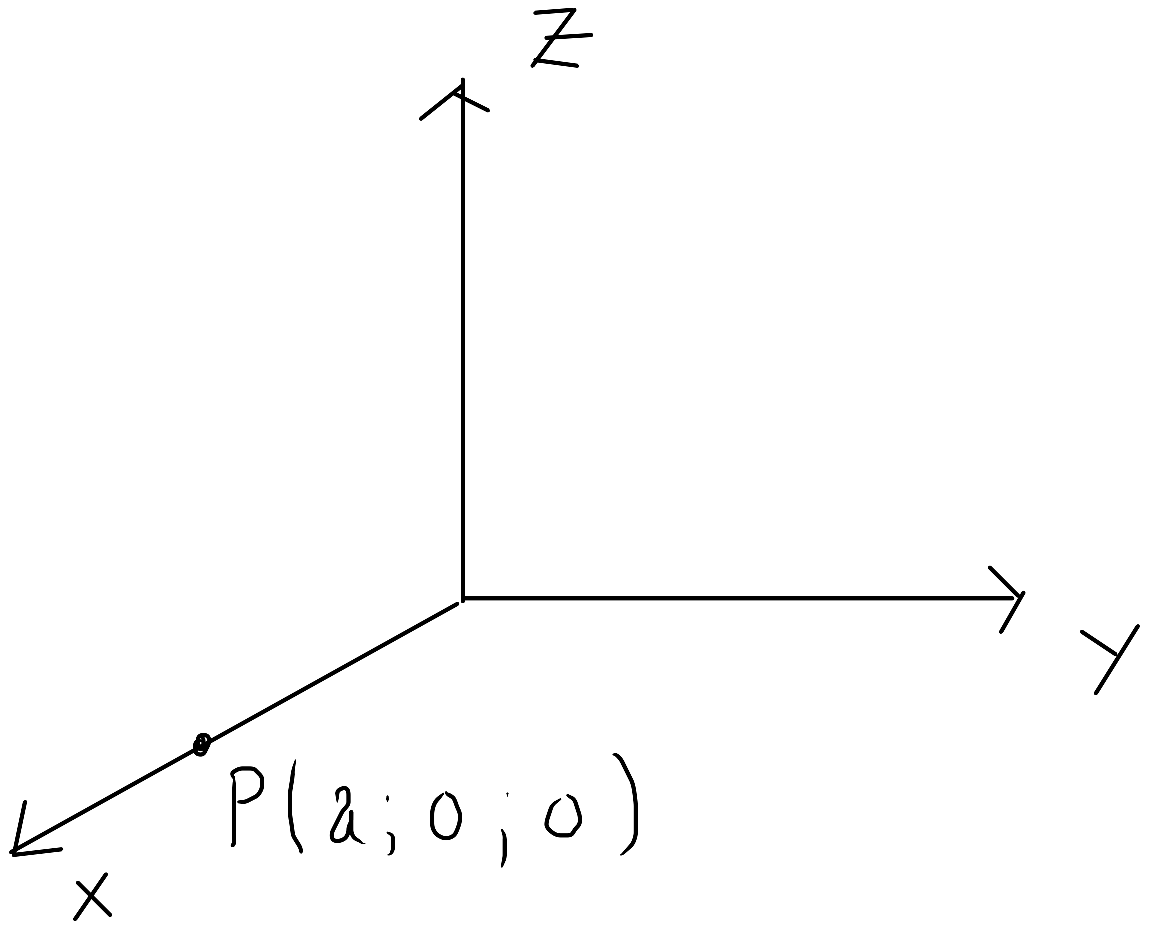
01.02.23

1.4.18 On donne les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Calculer le point P qui est situé sur l'axe Ox et tel que le triangle APB soit rectangle en P.



$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BP} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

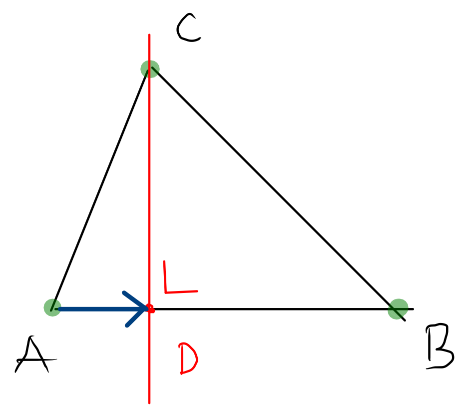
$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = (a+2)(a+6) - 3 - 2 = a^2 + 8a + 7$$

$$a^2 + 8a + 7 = 0$$

$$(a+7)(a+1) = 0$$

$$a = -7 \quad \text{ou} \quad a = -1$$

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.



$$\vec{AD} \perp \vec{CD} \Rightarrow \vec{AD}\cdot\vec{CD} = 0$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{AD} \parallel \vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ k \end{pmatrix}$

2) $\vec{CD} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{CD} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{CD} = \begin{pmatrix} -m \\ 3m \end{pmatrix}$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+3k \\ -3+k \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \\ 3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ -4+3m \end{pmatrix}$$

d'où le système d'équations :

$$\begin{cases} -7+3k = 1-m \\ -3+k = -4+3m \end{cases}$$

Résolvons-le :

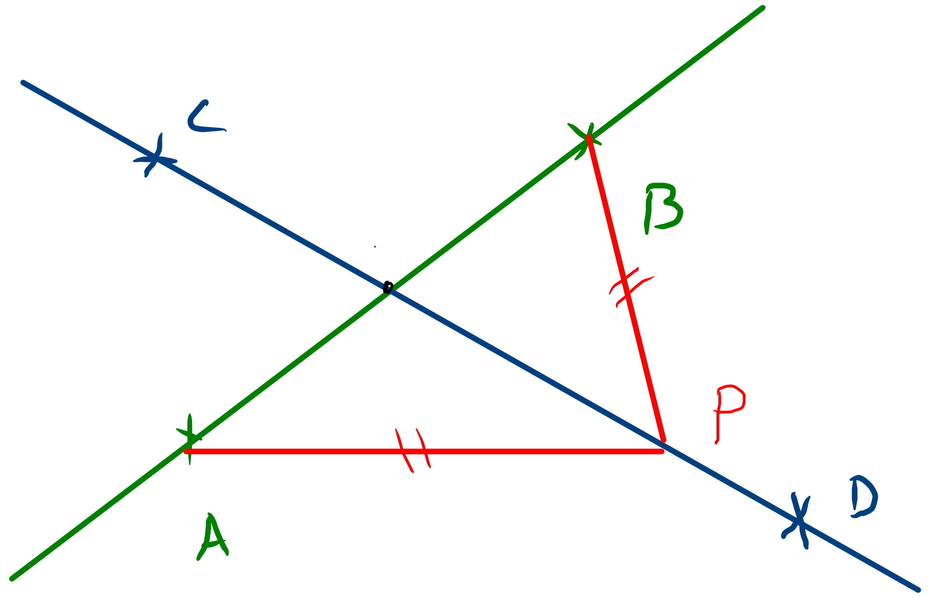
$$\begin{cases} 3k+m = 8 \\ k-3m = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} k & m \\ \cdot 1 & \cdot 3 \\ \cdot(-3) & \cdot 1 \end{array}$$

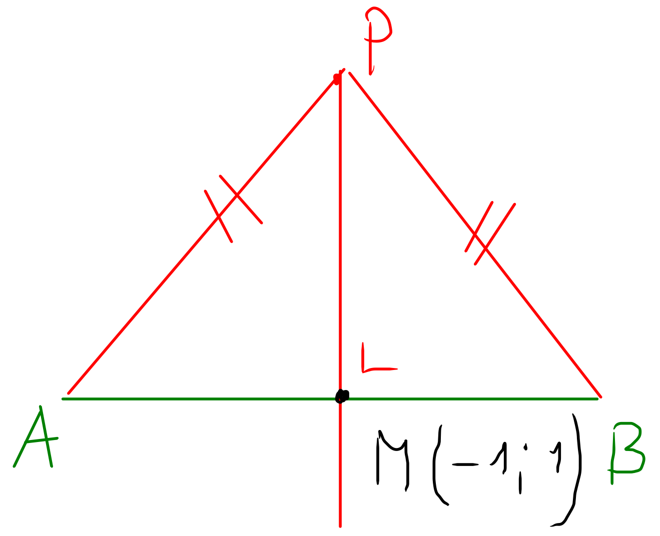
$$\begin{cases} 10m = 11 \\ 10k = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1{,}1 \\ k = 2{,}3 \end{cases}$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} -7+3\cdot 2{,}3 \\ -3+2{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-0{,}1\,;\,-0{,}7)$$

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} 1-1{,}1 \\ -4+3\cdot 1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}7 \end{pmatrix}$$

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.





$$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MP} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ -k+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + m\,\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 \\ -4m+7 \end{pmatrix}$$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} k-1 = m-1 \\ -k+1 = -4m+7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-m = 0 \\ -k+4m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(1;-1)$$