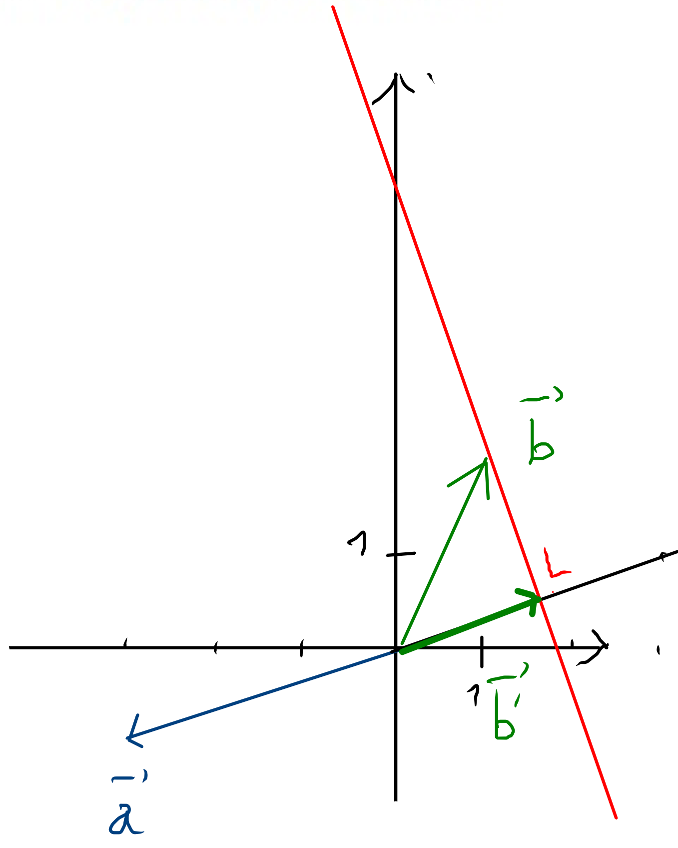
03.02.23

1.4.22 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle.

Construire et calculer la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.



$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$\vec{b}'$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

Avec la formule : $\vec{b}' = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{a} &= -3 - 2 = -5 \\ \|\vec{a}\|^2 &= \left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}\right)^2 = 10 \end{aligned}\right\} \vec{b}' = \frac{-5}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -0,5 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

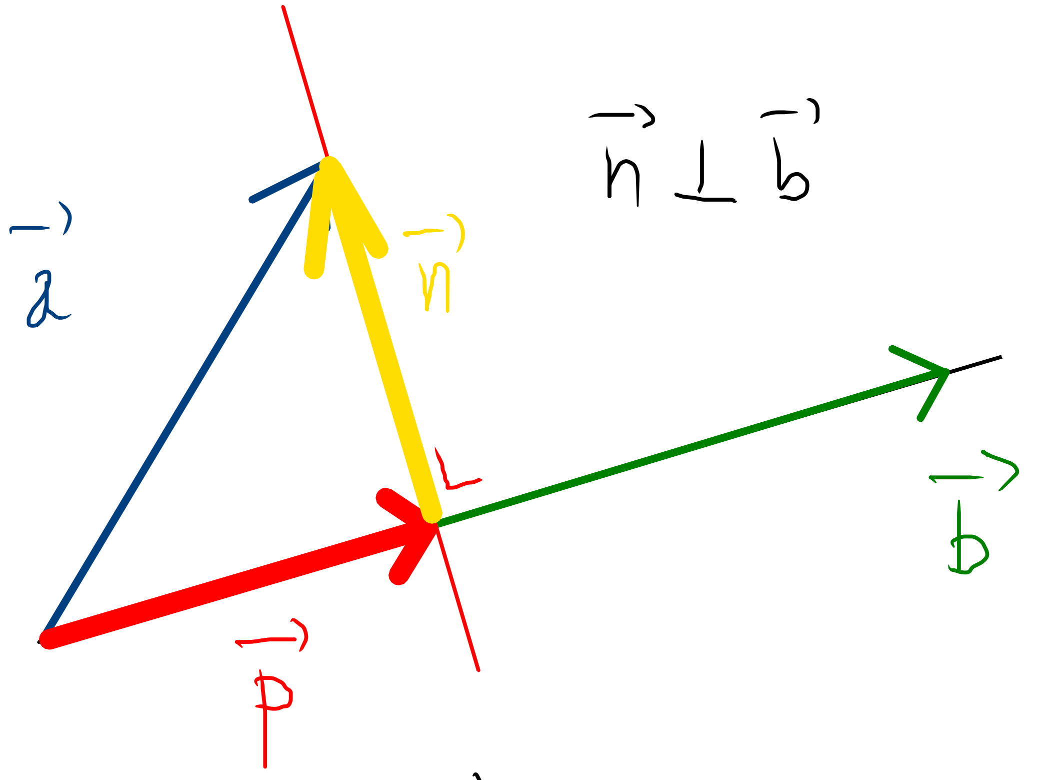
Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre

Soit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

A partir de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, déterminons la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

Soit $\vec{n}$ tel que $\vec{n} = \vec{a} - \vec{p}$

Nous avons



$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{p} + \vec{n} \\ \vec{p} = \lambda \vec{b} \quad , \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Calculons le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{b} + \vec{n}) \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{b}) \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{b}}_{0}$$

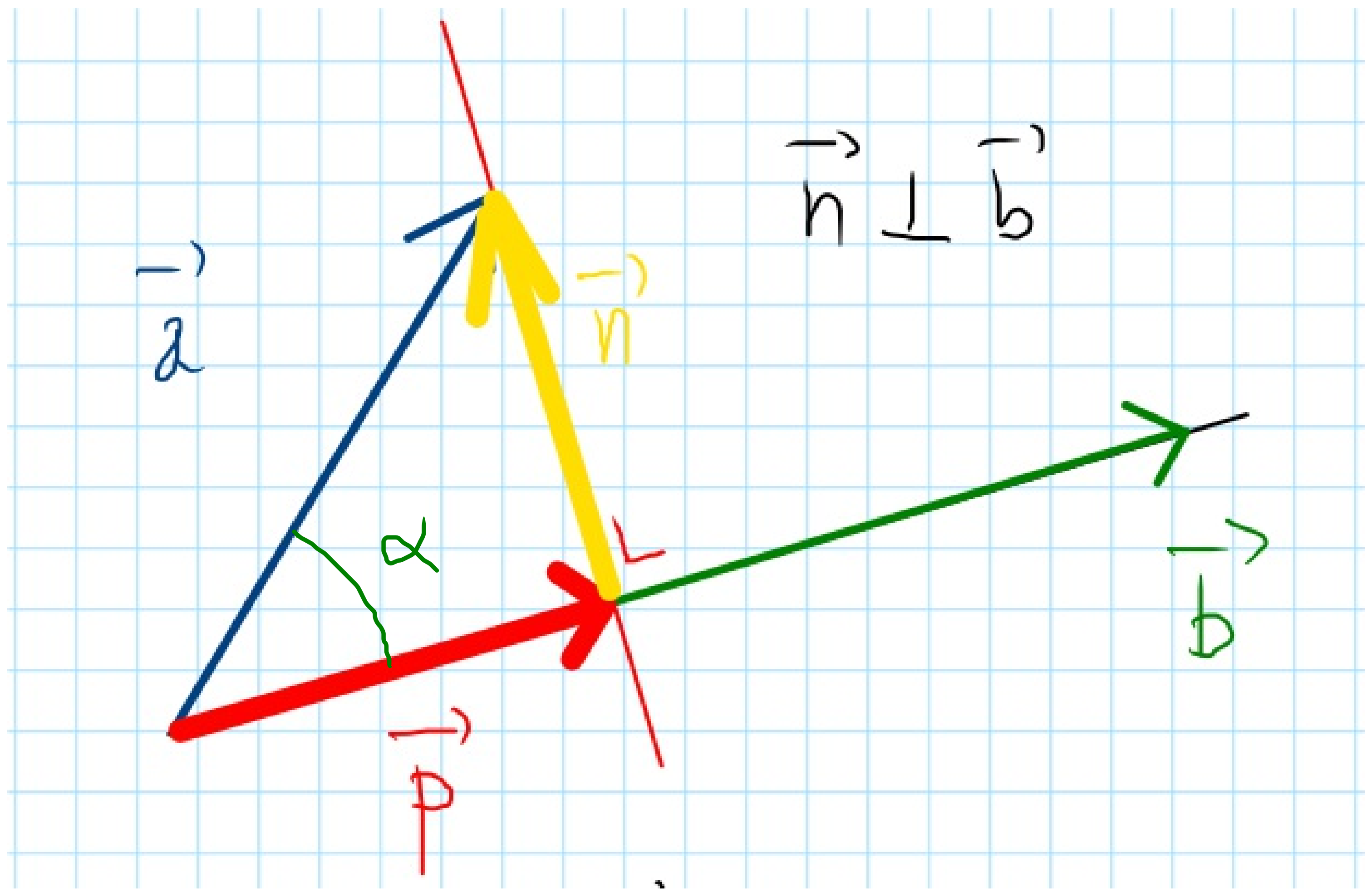
$$= \lambda (\vec{b} \cdot \vec{b}) = \lambda \|\vec{b}\|^2$$

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}}$$

Calculons la norme de $\vec{p}$:

$$\|\vec{p}\| = \left\| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b} \right\| = \left| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{\cancel{2}}} \right| \cancel{\|\vec{b}\|}$$

$$\boxed{\|\vec{p}\| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}}$$



Calculons α :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\alpha) = \frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$