05.10.22

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2+1$ soit $5\,x^2-3\,x+1$ et le reste $1-x$.

P d Q r

$$P = Q \cdot d + r$$

$$= (5x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 1) + (-x + 1)$$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \quad B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1 \quad B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27 \quad B(x) = x - 3$

① $A = (x - \alpha)\, Q + r$

Comme $\text{degré}(r) < \text{degré}(x-\alpha)$

$$\begin{array}{ccc} \text{degré}(r) & < & \text{degré}(x-\alpha) \\ \| & & \| \\ 0 & < & 1 \end{array}$$

donc $r \in \mathbb{R}$ est un nombre

Dans ① : $A(\alpha) = \underbrace{(\alpha - \alpha)\, Q} + r$

a) $A(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 5 \cdot 3 - 1$

$= 54 - 9 + 15 - 1 = 59$

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

Théorème

Tout polynôme dans $\mathbb{R}[x]$ de degré n admet au plus n zéros

$$p = 2x^3 - 14x + 12$$
$$= 2\underbrace{(x^3 - 7x + 6)}_{p_1}$$

Trouvons un zéro de p_1 :

$$p_1(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \Rightarrow (x-1) / p_1$$

Effectuons la division de p_1 par $x - 1$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 \ldots\ -7x + 6 & x - 1 \\ \hline
- & x^3 - x^2 & x^2 + x - 6 \\ \cline{2-2}
 & x^2 - 7x & \\
- & x^2 - x & \\ \cline{2-2}
 & -6x + 6 & \\
 & -6x + 6 & \\ \cline{2-2}
 & \text{reste : } 0 &
\end{array}$$

Nous avons :

$$p = 2(x-1)(x^2 + x - 6)$$
$$= 2(x-1)(x-2)(x+3)$$

zéros de p : 1 ; 2 ; -3

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

b) $p = x^4 - 6x^3 + x - 6$

Les zéros de p apparaissent, s'ils existent, parmi les diviseurs de -6 :

$\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6$

$p(-1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1) + (-1) - 6 = 1 + 6 - 1 - 6 = 0$

$\Rightarrow (x+1) / p$

Effectuons la division :

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 6x^3 \ \ldots \ + x - 6 & x + 1 \\
\hline
- & x^4 + x^3 & x^3 - 7x^2 + 7x - 6 \\
\hline
 & -7x^3 & \\
- & -7x^3 - 7x^2 & \\
\hline
 & 7x^2 + x & \\
- & 7x^2 + 7x & \\
\hline
 & -6x - 6 & \\
 & -6x - 6 & \\
\hline
 & \text{reste : } 0 &
\end{array}$$

$$p = (x+1)\underbrace{(x^3 - 7x^2 + 7x - 6)}_{p_1}$$

Déterminons les zéros de p_1 :

- $p_1(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 7 \cdot (-1) - 6 = -1 - 7 - 7 - 6 \neq 0$
- $p_1(1) = 1 - 7 + 7 - 6 \neq 0$
- $p_1(2) = 8 - 28 + 14 - 6 \neq 0$
- $p_1(-2) = -8 - 28 - 14 - 6 \neq 0$
- $p_1(6) = 216 - 252 + 42 - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6) / p_1$

Effectuons la division de p_1 par $x - 6$:

$$p = (x+1)(\underbrace{x^3 - 7x^2 + 7x - 6}_{p_1})$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + 7x - 6 & x - 6 \\ \hline - \quad x^3 - 6x^2 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 7x & \\ - \quad -x^2 + 6x & \\ \hline x - 6 & \\ x - 6 & \\ \hline & \end{array}$$

Ainsi : $p = (x+1)(x-6)(\underbrace{x^2 - x + 1}_{p_2})$

Factorisons p_2 :

Cherchons les zéros de p_2 :

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 < 0$$

Comme p_2 n'a pas de zéro, il n'est pas factorisable.

$$\boxed{p = (x+1)(x-6)(x^2 - x + 1)}$$

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x-1)(x+2)$,

a) $p = x^3 + mx + n$

p est divisible par $(x-1)(x+2)$, on doit avoir :

① $p(1) = 0 \Rightarrow 1 + m + n = 0$

② $p(-2) = 0 \Rightarrow -8 - 2m + n = 0$

Résolvons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} m + n &=& -1 \\ -2m + n &=& 8 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c|c} m & n \\ \cdot 2 & 1 \\ \cdot 1 & (-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3n = 6 \\ 3m = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 2 \\ m = -3 \end{array}\right.$$

Le polynôme est $x^3 - 3x + 2$