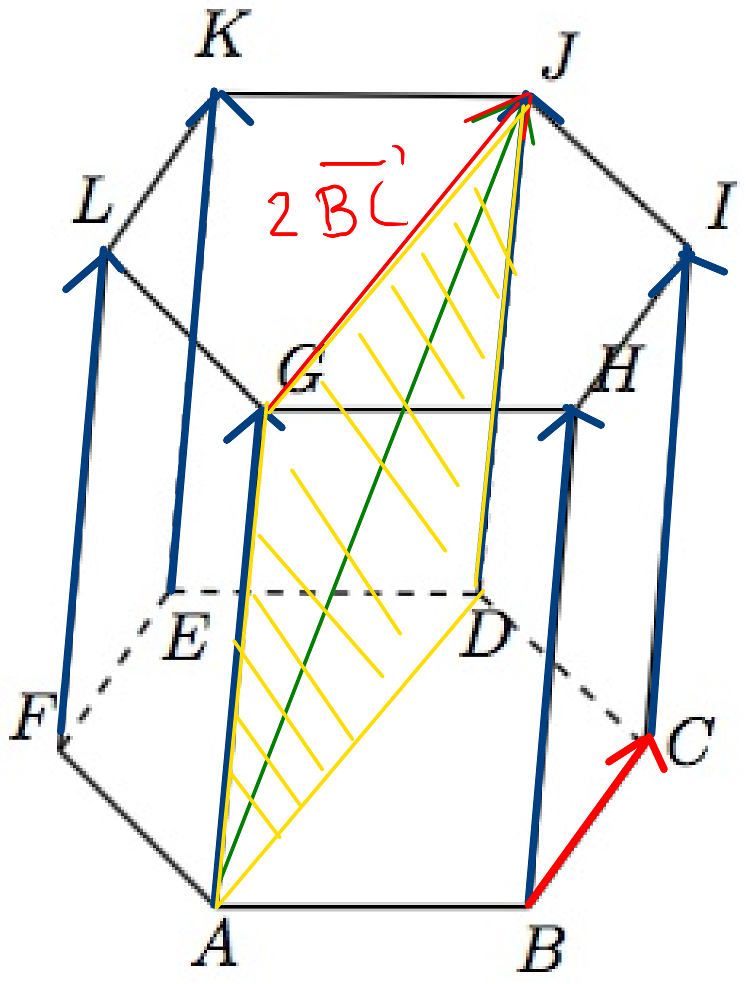
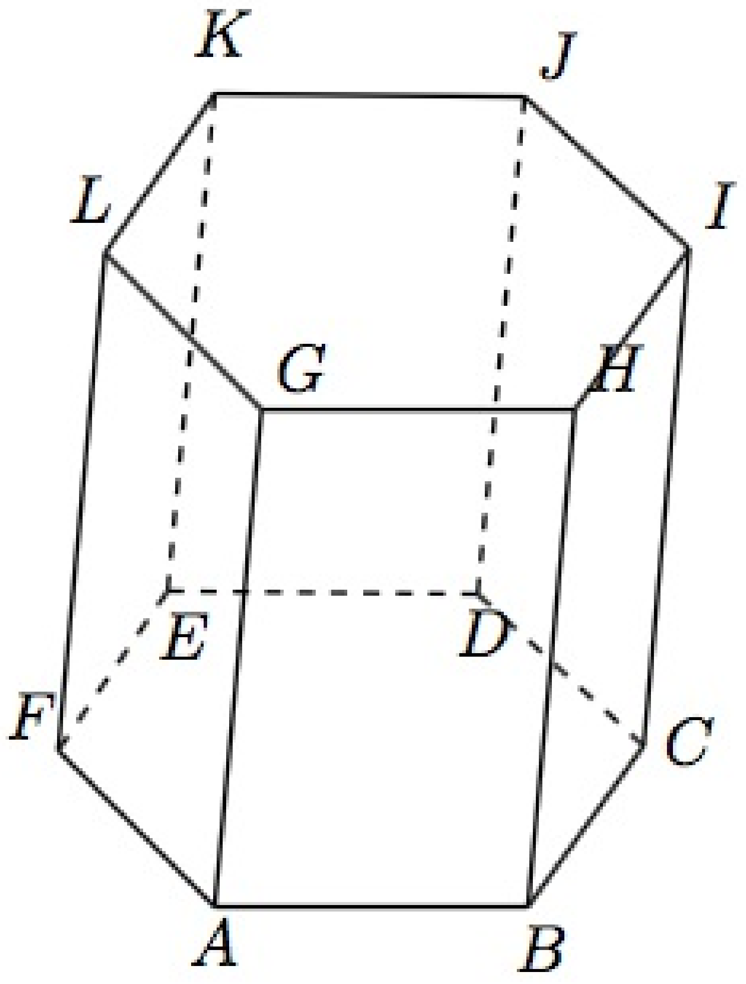
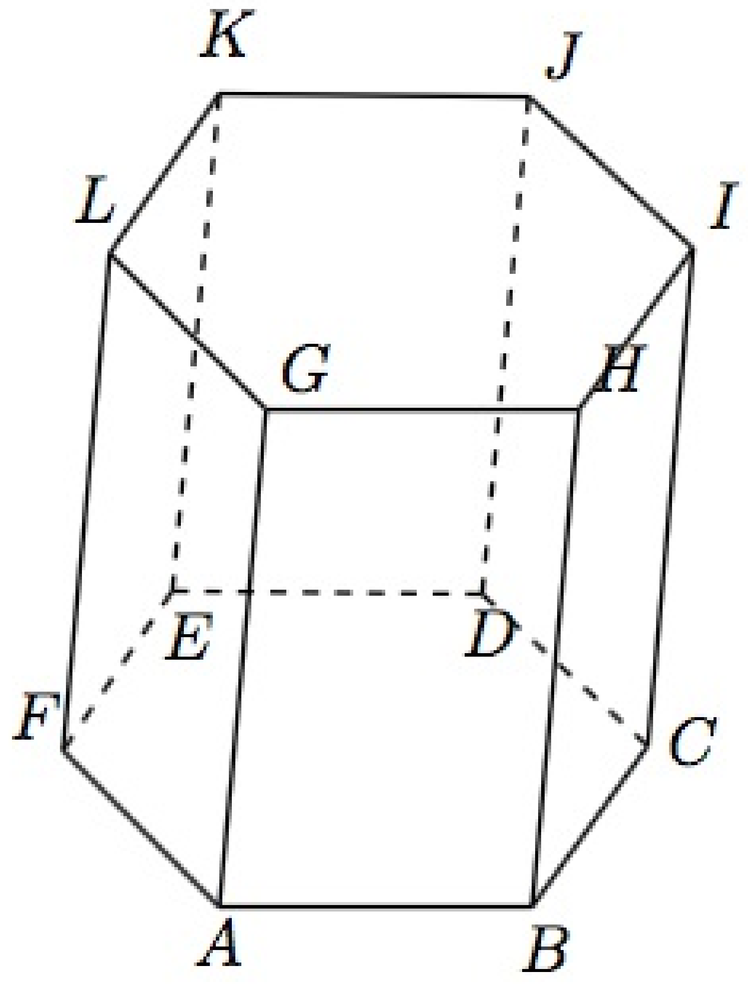
07 09 12

1.2.1 On considère un prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaisons linéaires des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$ c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

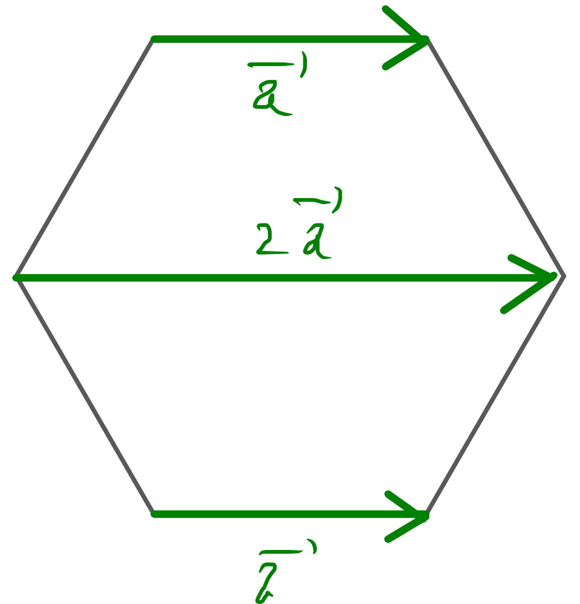




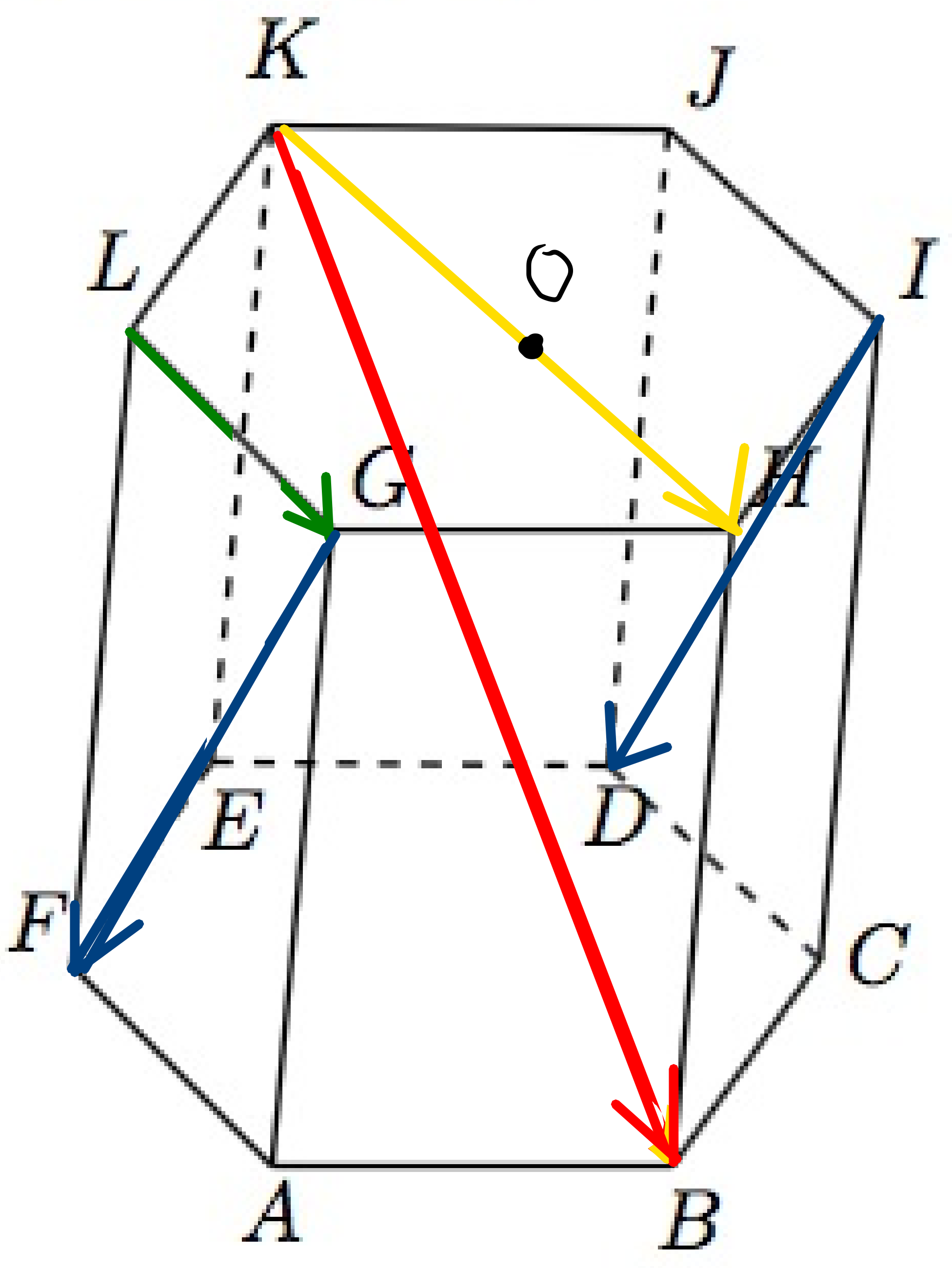


a) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{EK} + 2\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$



b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$



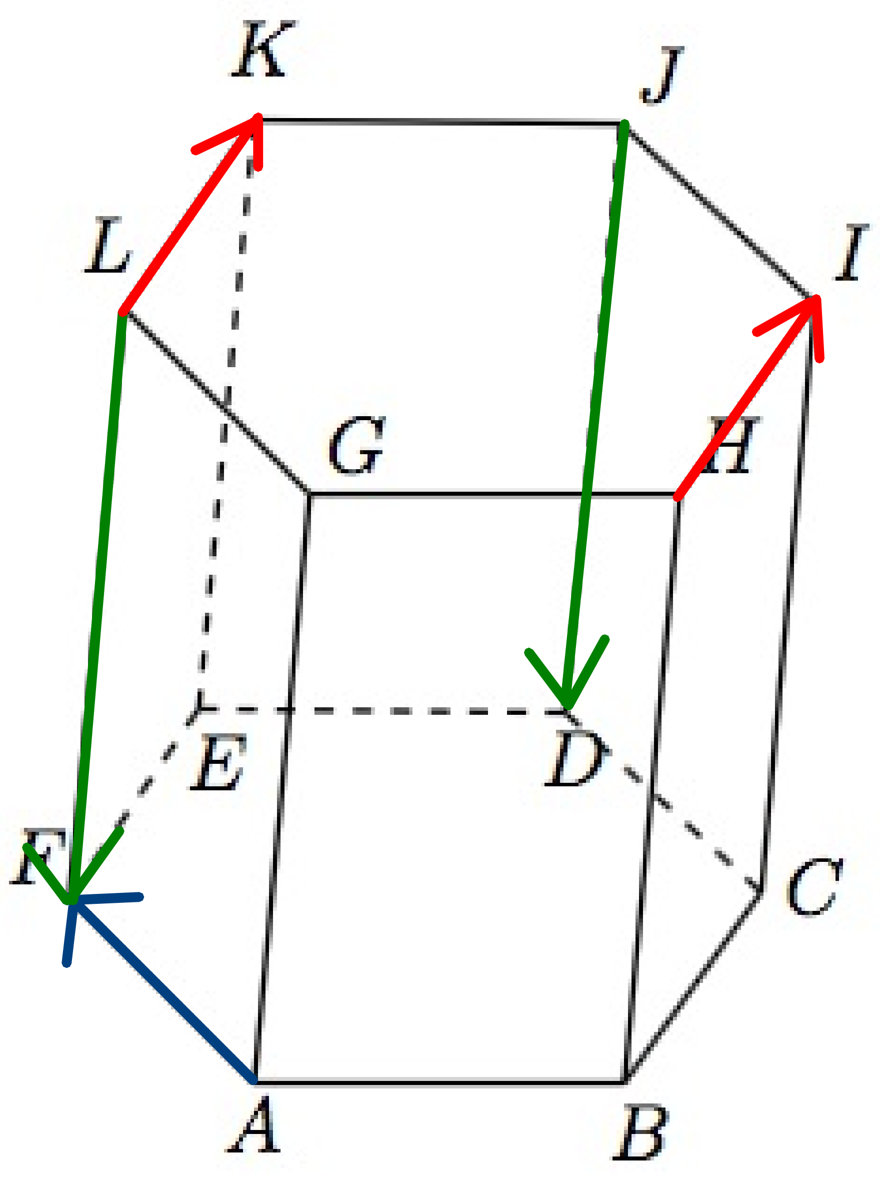
Ces trois vecteurs sont coplanaires

$$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EB}$$

$$= \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{ID} + 2\overrightarrow{LG}$$

$$= 3\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{ID}$$

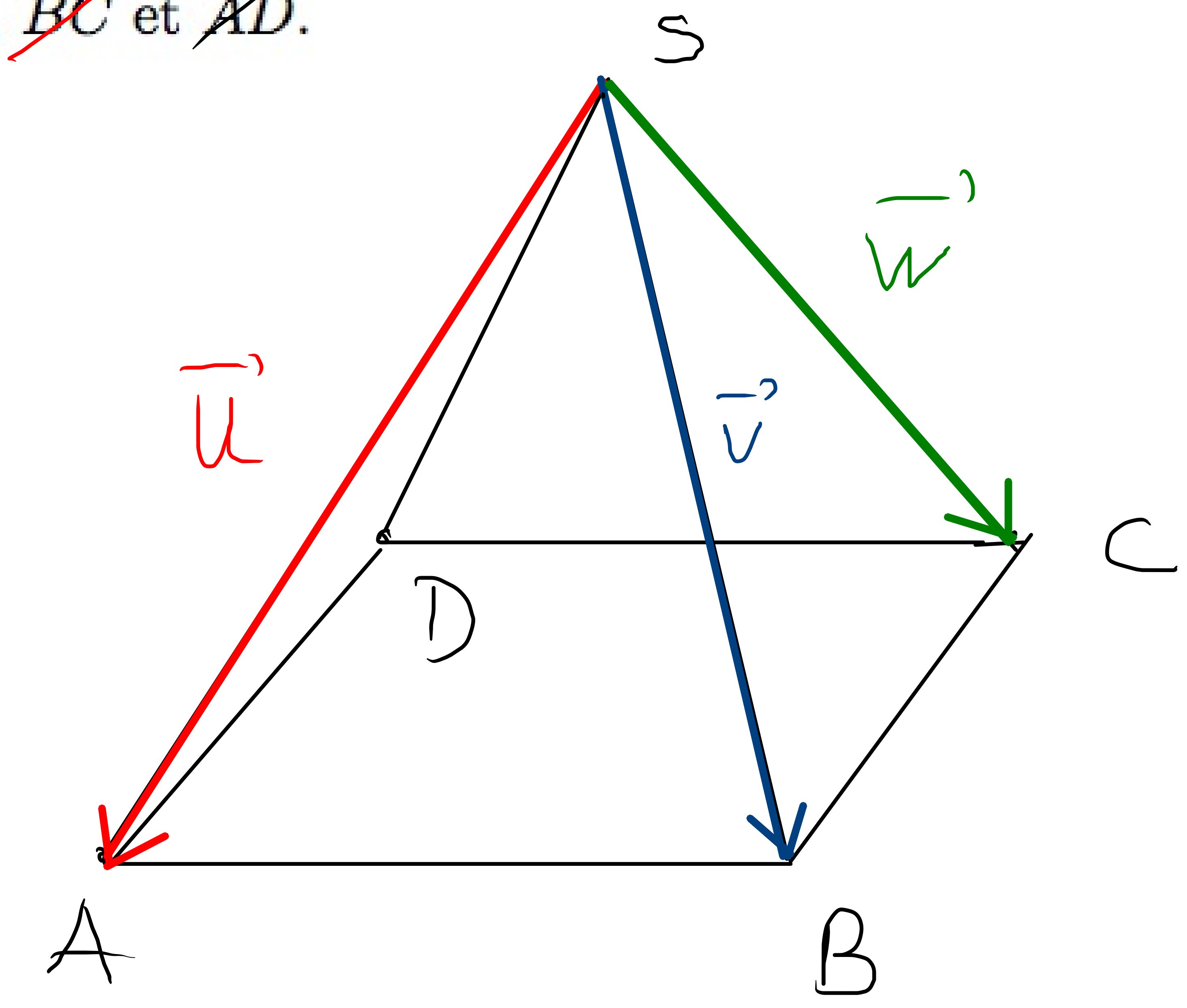
c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$



Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires

Donc $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{HI})$ est une base de V_3.

1.2.2 Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\cancel{\overrightarrow{SD}}$, $\cancel{\overrightarrow{AC}}$, $\cancel{\overrightarrow{BD}}$, $\cancel{\overrightarrow{AB}}$, $\cancel{\overrightarrow{BC}}$ et $\cancel{\overrightarrow{AD}}$.

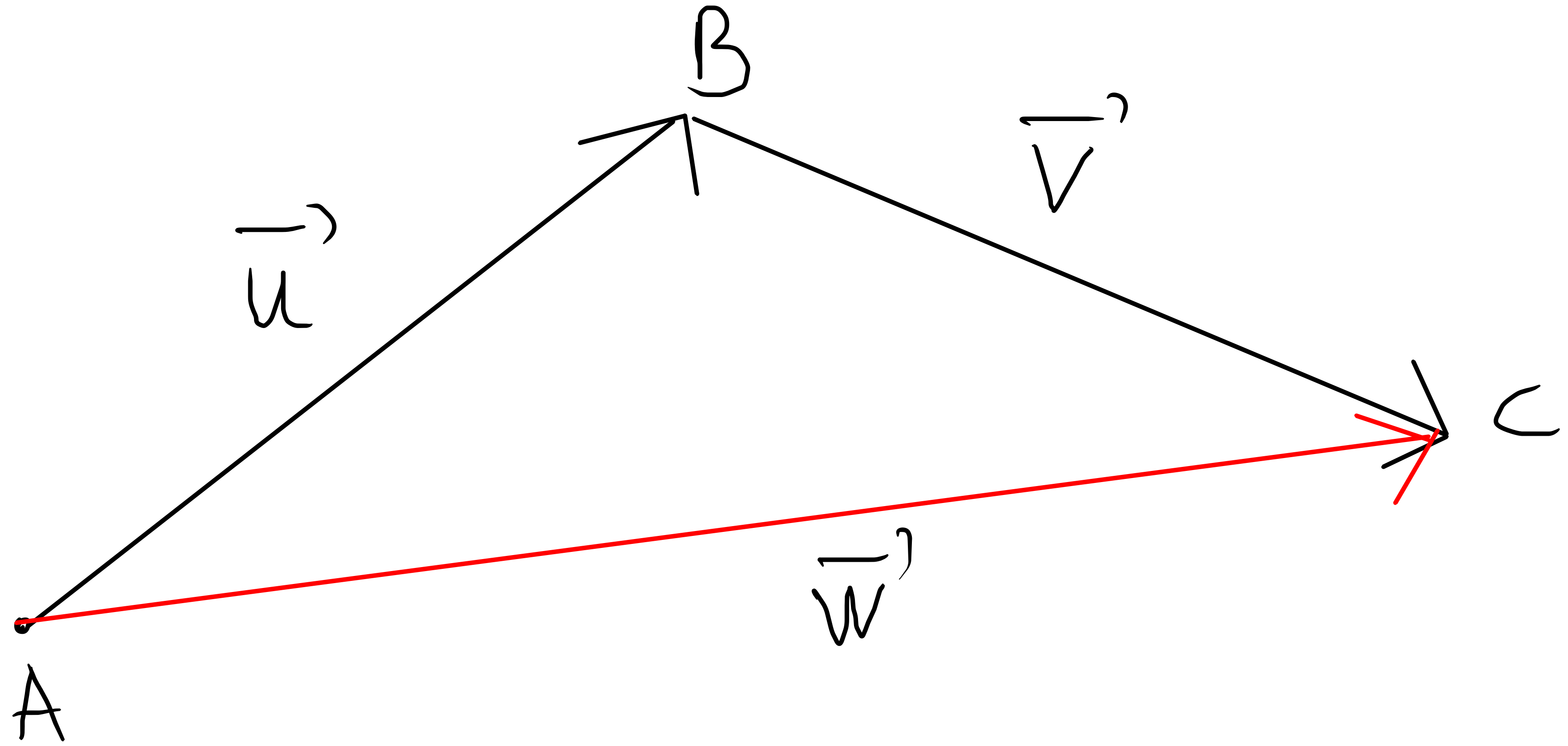


$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\overrightarrow{BC} = \vec{w} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{u} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \vec{v} - \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$$
$$= \vec{w} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= -\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} - \vec{v}$$
$$= \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$$

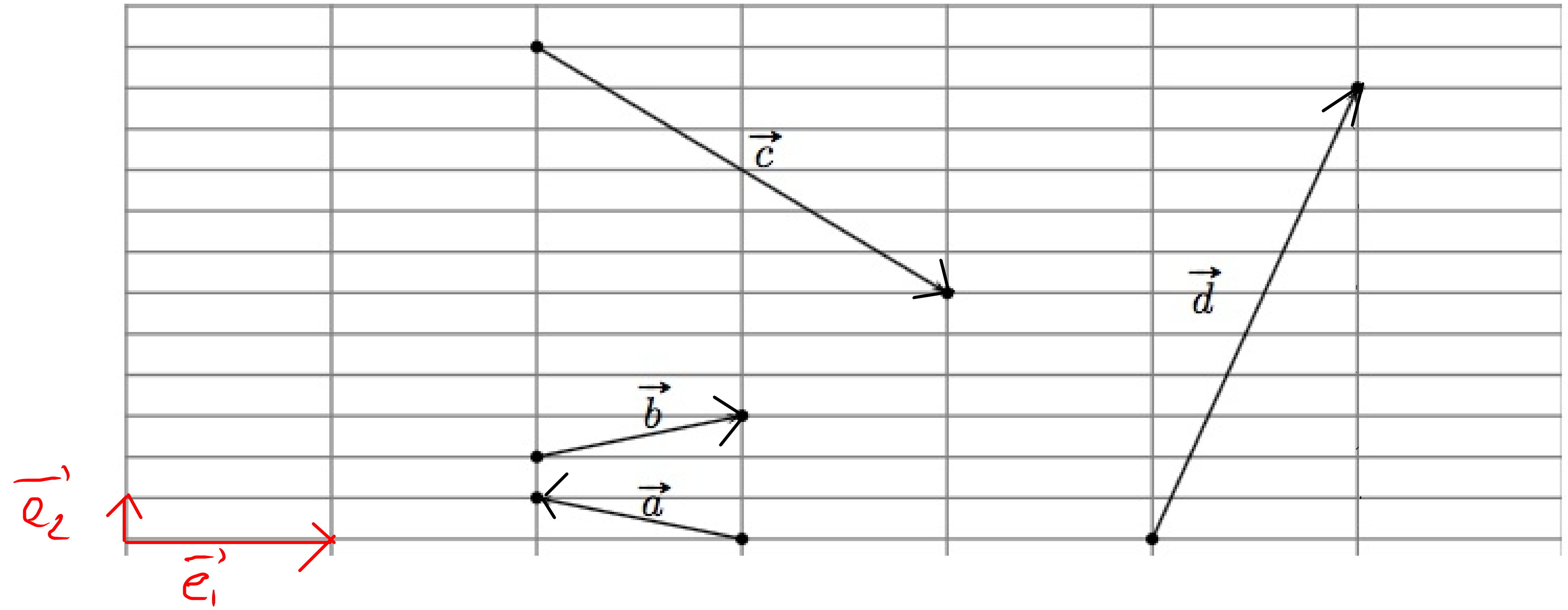


$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

$$\vec{w} - \vec{u} = \vec{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$$

1.2.4 Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ si :



Exprimer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{c}, \vec{d})$

Considérons la base naturelle $\mathcal{B}^* = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

donc

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_* \\
\vec{b} &= \vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_* \\
\vec{c} &= 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}_* \\
\vec{d} &= \vec{e_1} + 11\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exprimer $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ en fonction de $\vec{c}$ et $\vec{d}$

$$\begin{cases} \vec{c} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} \\ \vec{d} = \vec{e_1} + 11\vec{e_2} \end{cases}$$

$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$
$\cdot 1$	$\cdot 11$
$\cdot (-2)$	$\cdot 6$

1) $\vec{c} - 2\vec{d} = -28\vec{e_2}$

$$\boxed{\vec{e_2} = -\frac{1}{28}\vec{c} + \frac{1}{14}\vec{d}}$$

2) $11\vec{c} + 6\vec{d} = 28\vec{e_1}$

$$\boxed{\vec{e_1} = \frac{11}{28}\vec{c} - \frac{3}{14}\vec{d}}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{b} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{11}{28}\vec{c} + \frac{3}{14}\vec{d} - \frac{1}{28}\vec{c} + \frac{1}{14}\vec{d}$$

$$\vec{a} = -\frac{12}{28}\vec{c} + \frac{4}{14}\vec{d}$$

$$= -\frac{3}{7}\vec{c} + \frac{2}{7}\vec{d}$$