2.5.21 Méthode du pivot de Gauss

m) $\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$

Présentons ce système sous une forme matricielle

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 29 \\ 1 & 3 & 30 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 17 \end{array}\right) \iff L_1 \leftrightarrow L_2$$

Nous allons effectuer des opérations élémentaires sur les lignes. Nous pouvons :

1) échanger deux lignes
2) multiplier une ligne par un nombre non nul
3) additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 30 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 29 \\ 1 & -1 & 1 & 17 \end{array}\right) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 30 & 6 \\ 0 & -10 & -89 & 11 \\ 0 & -4 & -29 & 11 \end{array}\right) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{-1}{10} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{4} L_3 \end{array}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 30 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 89/10 & -11/10 \\ 0 & 1 & 29/4 & -11/4 \end{array}\right) \iff \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 33/10 & 93/10 \\ 0 & \boxed{1} & 89/10 & -11/10 \\ 0 & 0 & -33/20 & -33/20 \end{array}\right) \iff L_3 \leftarrow \frac{-20}{33} L_3$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 33/10 & 93/10 \\ 0 & \boxed{1} & 89/10 & -11/10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{33}{10} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{89}{10} L_3 \end{array}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -10 \\ z = 1 \end{cases}$$

o) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_1 \iff$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & | & 8 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & -3 & -3 & | & -15 \\ 0 & -7 & -1 & | & -17 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \iff L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & | & 5 \\ 0 & 7 & 1 & | & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \end{matrix} \iff$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -6 & | & -18 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3 \iff$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix} \iff$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

k) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 10 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & 6 & -28 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 11 & 6 & -28 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{16} L_3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

t) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 22 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrice des coefficients

$\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 22 \end{pmatrix}$ matrice des termes constant

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 22 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = -2t + 5 \\ z = t \end{cases}$

$$S = \left\{ (t+4 ; -2t+5 ; t) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$