1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\cancel{\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}},\ \cancel{\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\ \cancel{\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}},\ \cancel{\vec{e}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}},$$

$$\cancel{\vec{f}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}},\ \cancel{\vec{g}=\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}},\ \cancel{\vec{h}=\begin{pmatrix}1/9\\1/3\end{pmatrix}},\ \cancel{\vec{i}=\begin{pmatrix}0\\2/3\end{pmatrix}}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{a} = K\vec{b}$.

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 2\\ \frac{1}{2}\cdot 6\end{pmatrix}$$

$\vec{a} \backsim \vec{d} \backsim \vec{e} \backsim \vec{h}$

$\vec{b} \backsim \vec{e} \backsim \vec{i}$

$\vec{c} \backsim \vec{e} \backsim \vec{g}$

$\vec{f} \backsim \vec{e}$

Rappel :
$$\underbrace{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}_{\substack{\text{déterminant}\\ 2\times 2}} = ad - bc$$

Propriété
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \iff \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = 0, \text{ pour } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K b_1\\K b_2\end{pmatrix},\ K \in \mathbb{R} \iff$$

$$a_1 \cdot \cancel{K} b_2 = a_2 \cdot \cancel{K} b_1 \underset{K\neq 0}{\iff} a_1 b_2 = a_2 b_1 \iff$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \iff \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = 0$$

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & m+4 \end{vmatrix} = 0 \iff m+4 = -10$

$\iff m = -14$

b) $\begin{vmatrix} m & 3 \\ m+4 & m-1 \end{vmatrix} = 0$

$m(m-1) - 3(m+4) = 0$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$(m-6)(m+2) = 0$

$\downarrow$ 6 $\downarrow$ -2

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \parallel \vec{a} = \quad \vec{x} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7t \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7t \\ -2t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 7t - 3\lambda = 0 \\ -2t + 5\lambda = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 15/29 \\ \lambda = 35/29 \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{x} = \frac{15}{29} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105/29 \\ -30/29 \end{pmatrix}$$