09.12.22

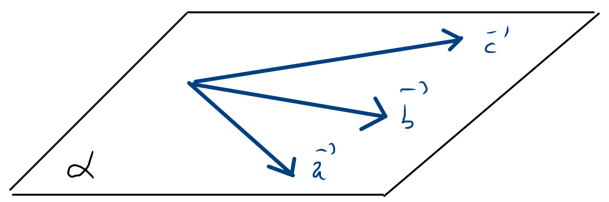
1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

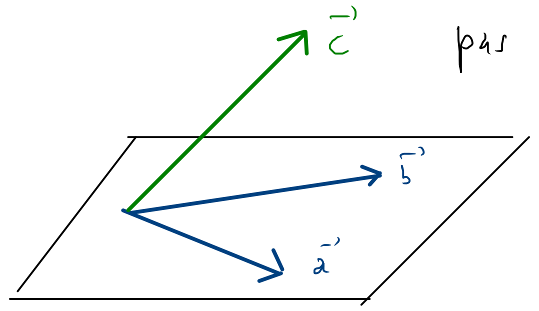
b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

coplanaires



$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

pas coplanaires



Trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$.

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 5\beta + 13\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 13 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & -7 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 34 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{17} L_3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

α alpha

β beta

γ gamma

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\alpha = 0$

$\beta = 2\gamma$

$$\boxed{0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}}$$

$\vec{b}$ et $\vec{c}$ colinéaires

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha + 5\beta + 13\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \alpha \\ \cdot 1 \\ \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta + 2\gamma = 0 \\ 17\beta + 34\gamma = 0 \\ -\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - 4\beta - 7\gamma = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \beta \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta = -2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{array}\right.$$

Il y a des solutions non nulles, par exemple $\gamma = -1$

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$$

ou plus généralement :

$$-\gamma\vec{a} - 2\gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

système homogène

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -11 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -11 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 19 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 19 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{31} L_3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc les vecteurs ne sont pas coplanaires.