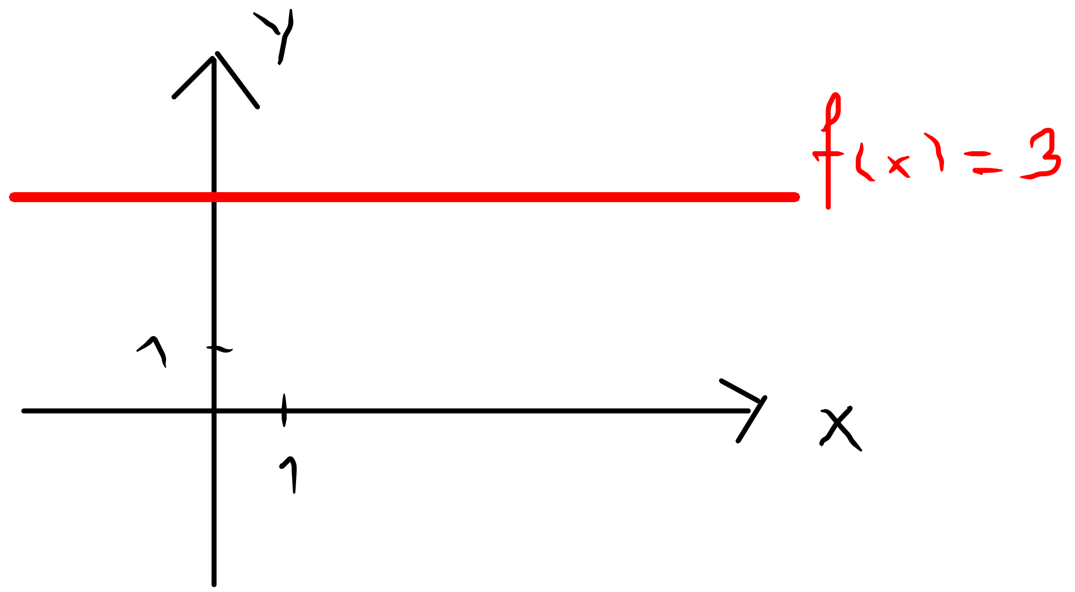
Etude complète de la fonction affine

15.03.23

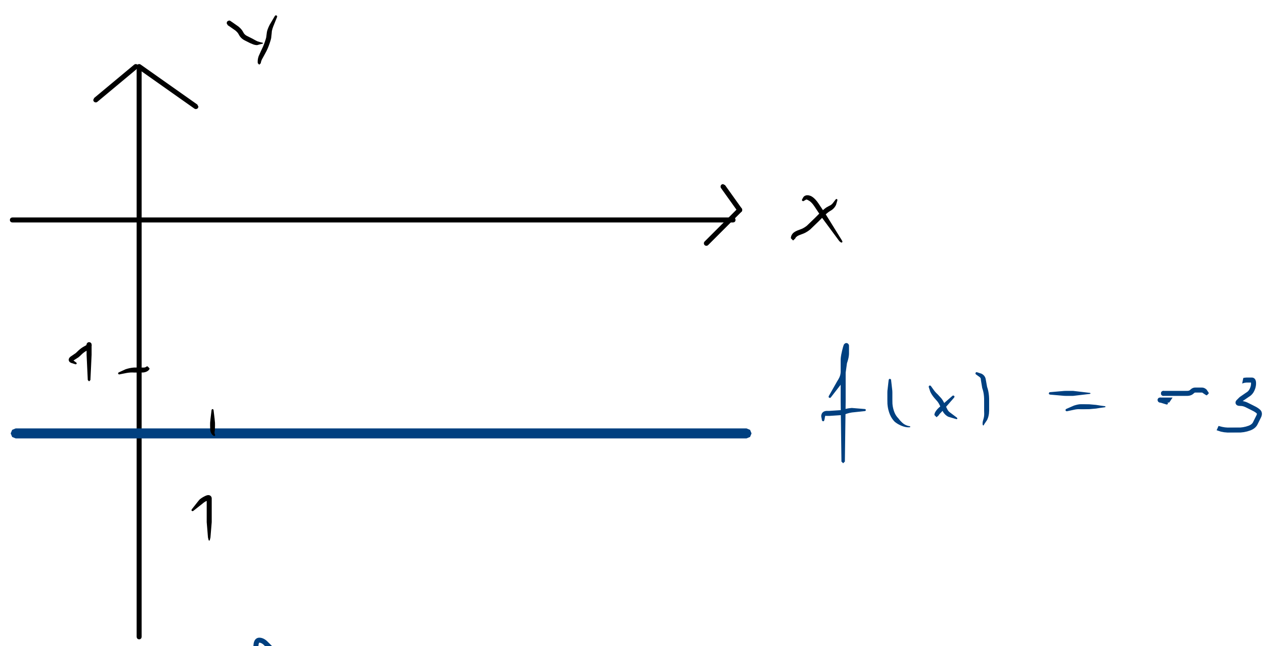
Soit $f(x) = mx + h$

Distinguons trois cas.

1) $m = 0$, $f(x) = h$. La fonction est constante.



$h > 0$



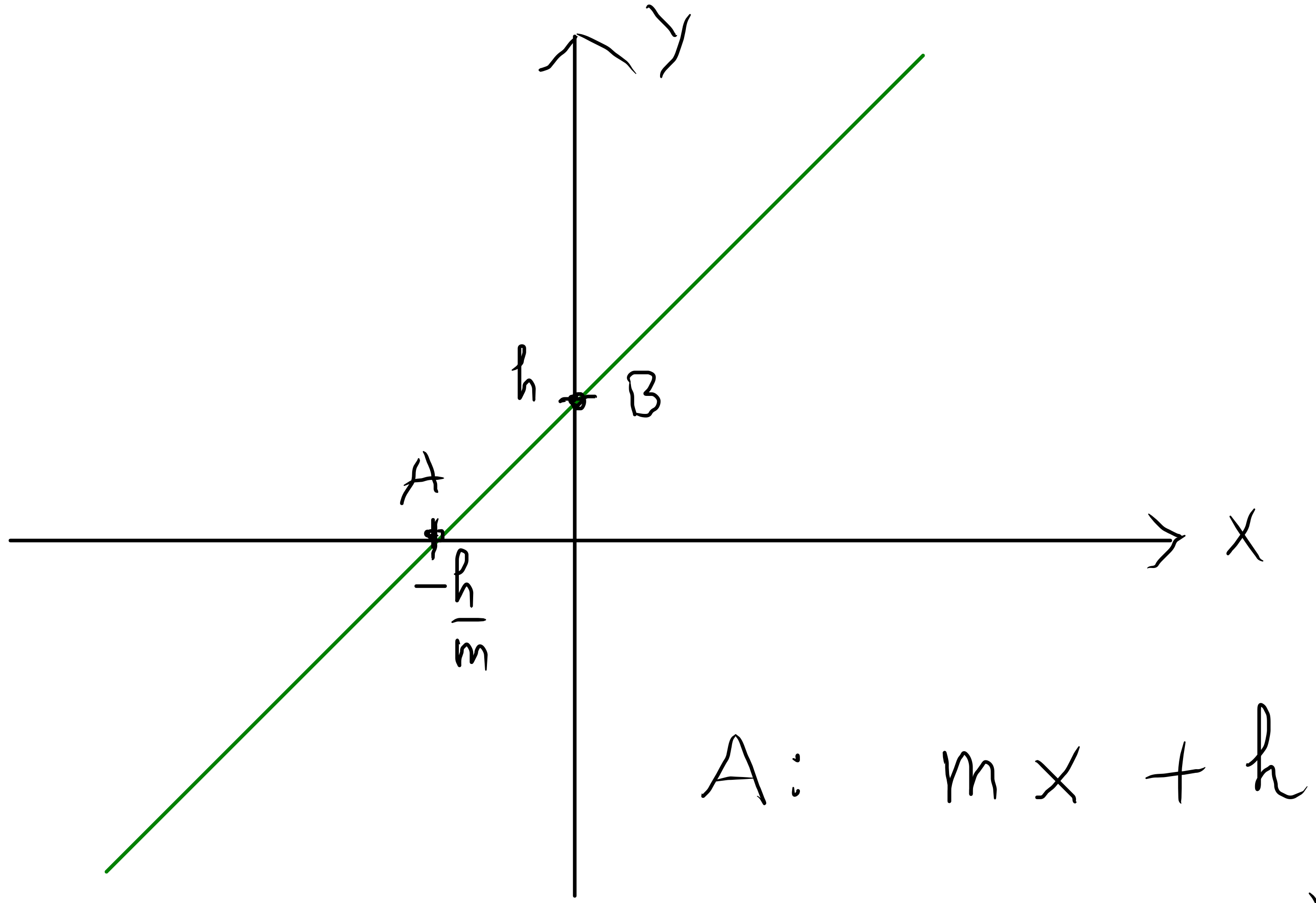
$h < 0$

Le signe de ces deux fonctions

x	
$f(x)$	$+$

x	
$f(x)$	$-$

2) <u>$m > 0$</u> : $f(x) = mx + h$



Les coordonnées de A et B :

$B(0\,;\,h)$

$A\left(-\frac{h}{m}\,;\,0\right)$

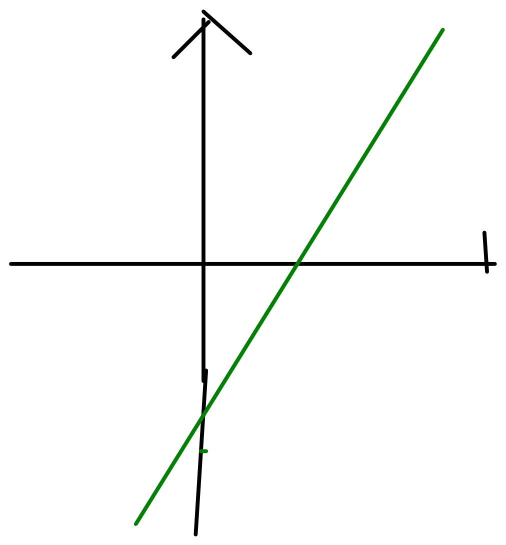
A : $mx + h = 0$

$x = -\frac{h}{m}$

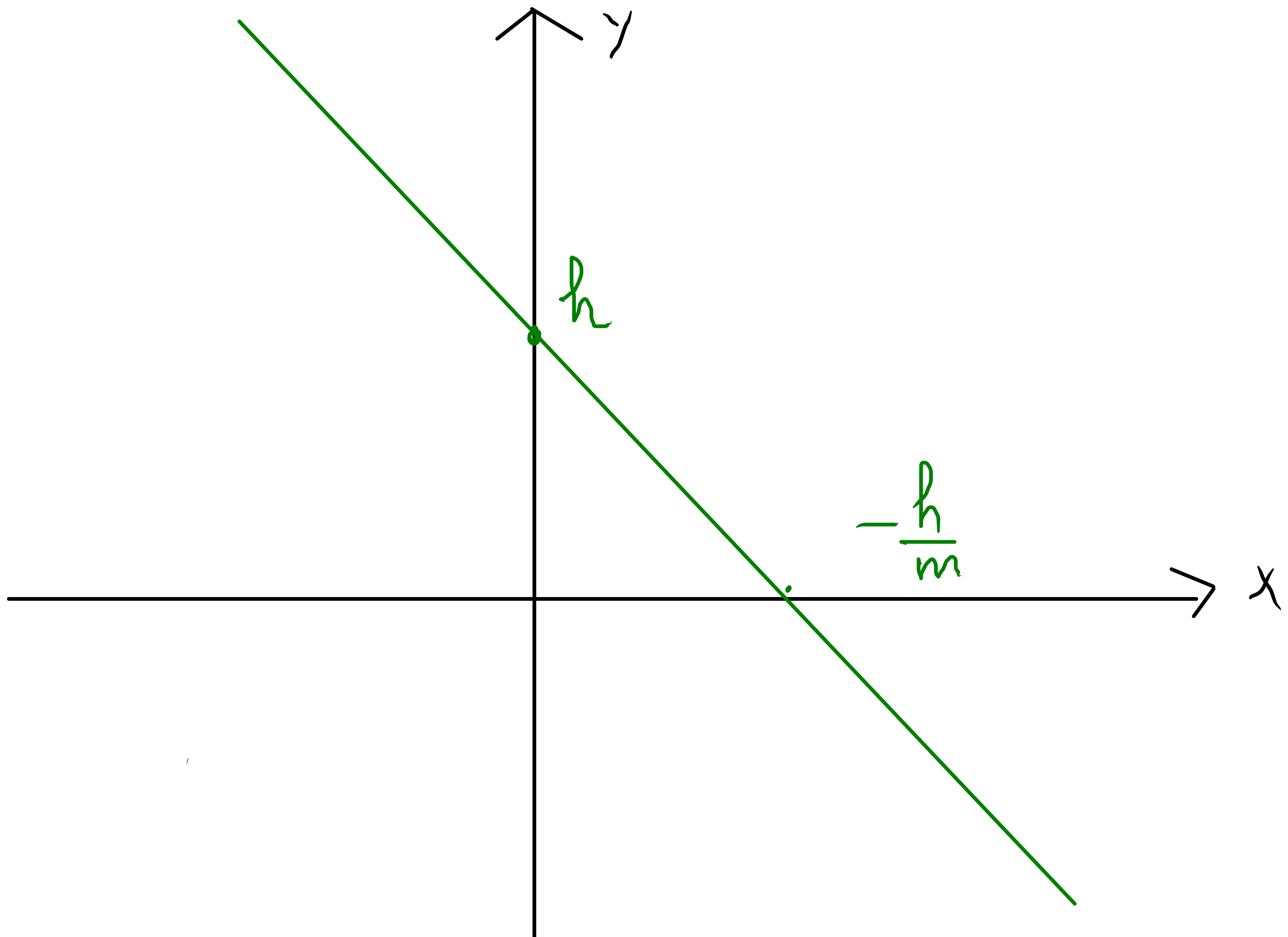
x		$-\frac{h}{m}$	
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exemple : $f(x) = 3x - 24$

x		8	
$f(x)$	$-$	0	$+$

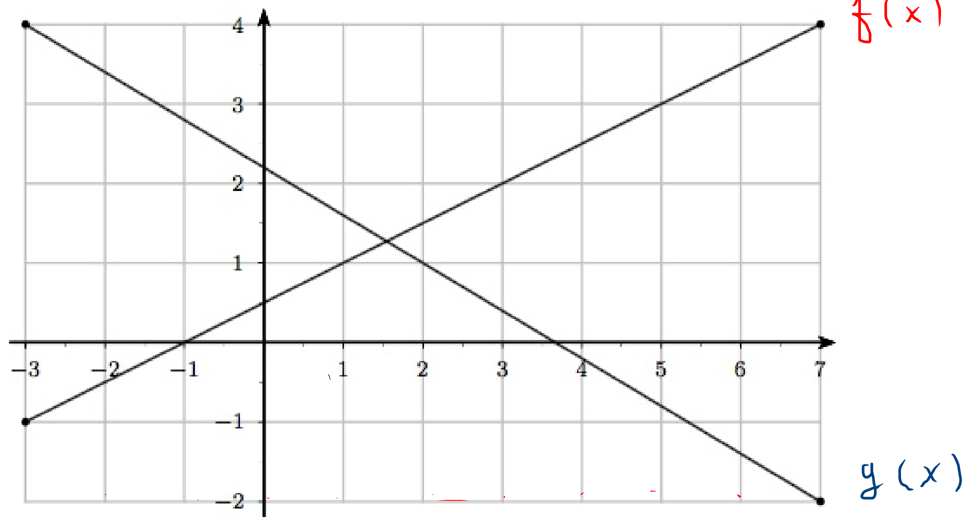


3) $\underline{m < 0}$: $f(x) = mx + h$



x		$-h/m$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

3.4.5



$$m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

$$m_1 = \frac{4 - (-2)}{-3 - 7} = \frac{6}{-10} = \frac{-3}{5}$$

$$g(x) = \frac{-3}{5}x + h_1$$

$$g(7) = -2 \Rightarrow \frac{-3}{5} \cdot 7 + h_1 = -2$$

$$-\frac{21}{5} + h_1 = -2$$

$$h_1 = -2 + \frac{21}{5}$$

$$h_1 = \frac{11}{5}$$

$$\boxed{g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}}$$

$$m_2 = \frac{-1 - 4}{-3 - 7} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + h_2$$

$$f(7) = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 7 + h_2 = 4$$

$$h_2 = 4 - \frac{7}{2}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Cherchons les coordonnées du point d'intersection des deux graphes

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

On résout l'équation :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5} &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} && \Big| \cdot 10 \\ -6x + 22 &= 5x + 5 && \Big| -5x - 22 \\ -11x &= -17 \\ x &= \frac{17}{11} \end{aligned}$$

Pour calculer la 2ème coordonnée :

$$f\left(\frac{17}{11}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{11} + \frac{1}{2} = \frac{17+11}{22} = \frac{28}{22} = \frac{14}{11}$$

$$I\left(\frac{17}{11} ; \frac{14}{11}\right)$$

Fonction réciproque d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + h$, avec $m \neq 0$. On note ${}^{r}\!f$, appelée fonction réciproque, la fonction telle que

$$f\left({}^{r}\!f(x)\right) = x$$

$${}^{r}\!f\left(f(x)\right) = x$$

$$x \xmapsto{\;f\;} \underbrace{mx + h}_{y} \xmapsto{\;{}^{r}\!f\;} x$$

$$\begin{aligned} y &= mx + h && \Big|\ -h \\ y - h &= mx && \Big|\ \div m \\ \underbrace{\frac{1}{m}y - \frac{h}{m}}_{} &= x \end{aligned}$$

Donc $\boxed{{}^{r}\!f(x) = \frac{1}{m}x - \frac{h}{m}}$

Exemple : $f(x) = 2x - 3$

$${}^{r}\!f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$f(7) = 14 - 3 = 11$

${}^{r}\!f(11) = \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7$

3.4.7 Dessiner les graphes des fonctions f suivantes

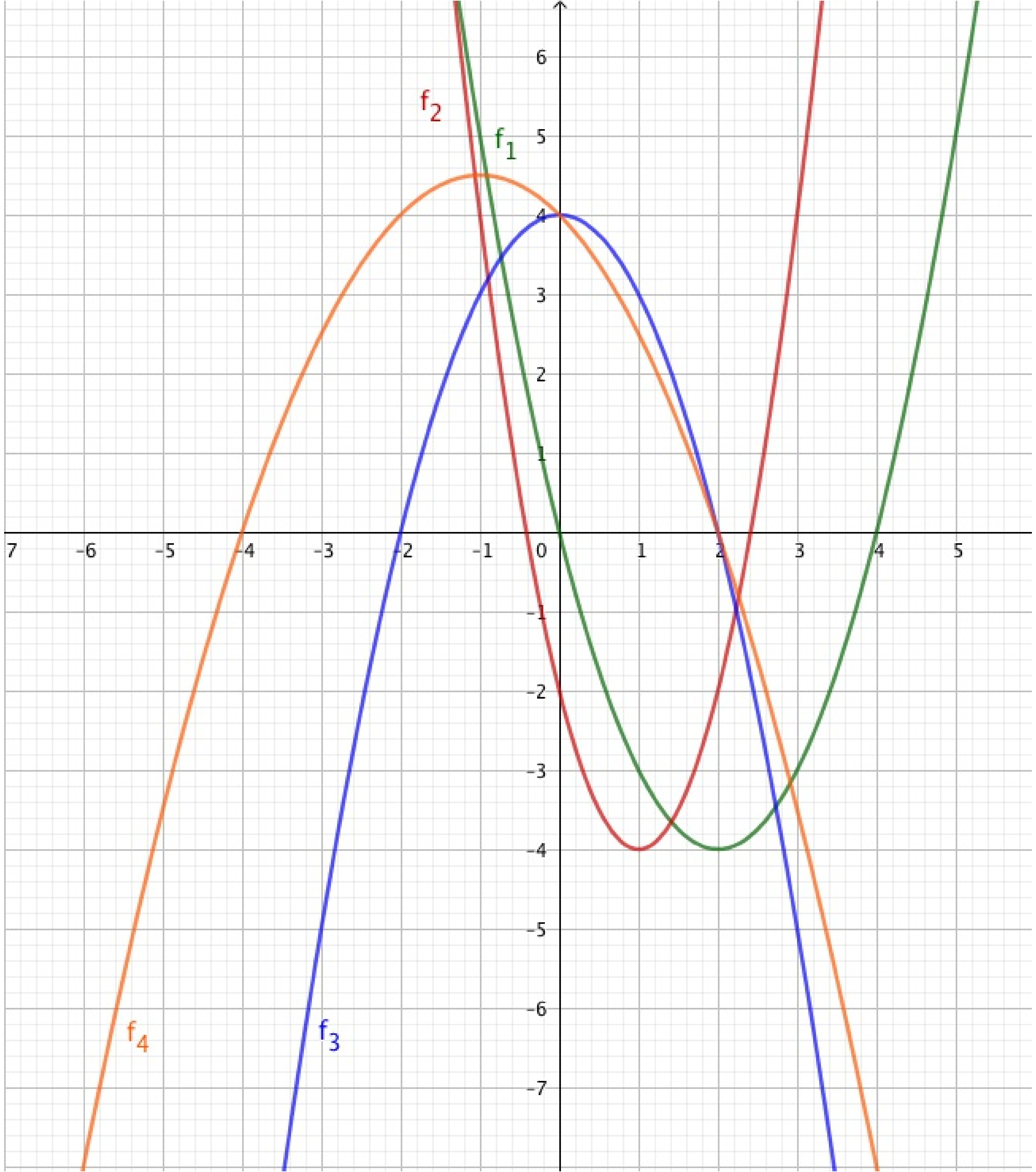
a) $f_1(x) = x^2 - 4\,x$

b) $f_2(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 2$

c) $f_3(x) = -x^2 + 4$

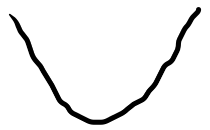
d) $f_4(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - x + 4$

	f1(x)	f2(x)	f3(x)	f4(x)
-5	45	68	-21	-3.5
-4	32	46	-12	0
-3	21	28	-5	2.5
-2	12	14	0	4
-1	5	4	3	4.5
0	0	-2	4	4
1	-3	-4	3	2.5
2	-4	-2	0	0
3	-3	4	-5	-3.5
4	0	14	-12	-8
5	5	28	-21	-13.5



f_1
f_2
f_3
f_4

3.4.8 Etudier le signe des trinômes.

a) $6x^2 - x - 2 = f(x)$ 

zéros : $6x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$