15.12.22

Déterminants 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\vec{v}, \vec{w}$ dans le plan $\quad \vec{v} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{w} \end{vmatrix} = 0$

Déterminants 3×3

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

règle de Sarrus

1.3.4

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) $\left|\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{array} = 21 - 10 + 0 + 13 - 24 - 0 = 0$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

coplanaires

b) $\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} = 0$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

coplanaires

c) $\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -11 \\ 5 & 3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{array} = 4$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

non coplanaires

Propriétés

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ coplanaires $\iff |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = 0$

Dém $\Rightarrow$ ($\Leftarrow$ plus tard)

Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires, alors il existe α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha a_1 + \beta b_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha a_2 + \beta b_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha a_3 + \beta b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} =$$

$$a_1 b_2 (\alpha a_3 + \beta b_3) + b_1 a_3 (\alpha a_2 + \beta b_2) + a_2 b_3 (\alpha a_1 + \beta_1 b)$$
$$- a_3 b_2 (\alpha a_1 + \beta b_1) - a_1 b_3 (\alpha a_2 + \beta b_2) - a_2 b_1 (\alpha a_3 + \beta b_3)$$
$$= 0$$

1.3.6 Calculer les vecteurs qui sont à la fois coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et coplanaires à $\vec{d}$ et $\vec{f}$, si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$