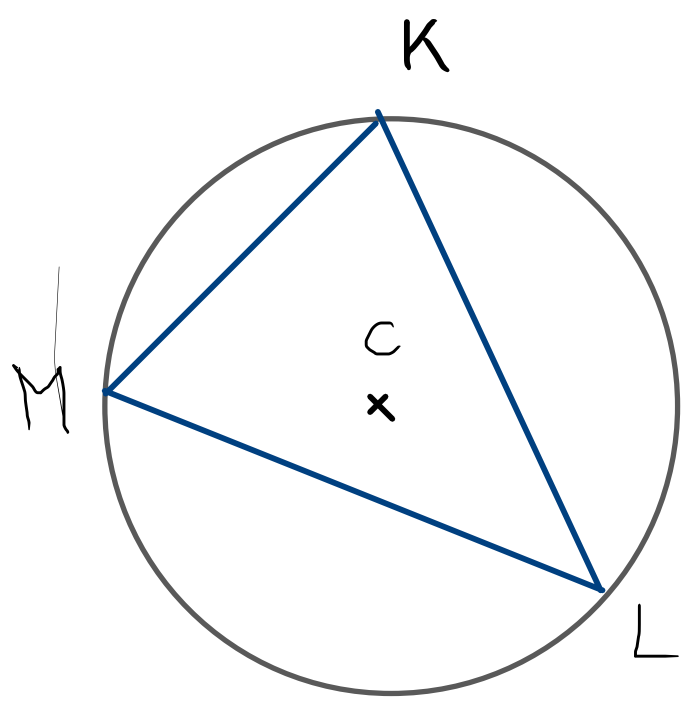
18.01.23

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.



Posons $C(\alpha;\beta)$

Les conditions :

$$\|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{KC}\|^2 = \|\overrightarrow{LC}\|^2$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \alpha+5 \\ \beta-4 \end{pmatrix} ; \quad \|\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{(\alpha+5)^2+(\beta-4)^2}$$

$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} \alpha+3 \\ \beta-6 \end{pmatrix} , \quad \|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{(\alpha+3)^2+(\beta-6)^2}$$

$$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} \alpha-9 \\ \beta+10 \end{pmatrix} , \quad \|\overrightarrow{LC}\| = \sqrt{(\alpha-9)^2+(\beta+10)^2}$$

$$\begin{cases} (\alpha+5)^2+(\beta-4)^2 = (\alpha+3)^2+(\beta-6)^2 \\ (\alpha+5)^2+(\beta-4)^2 = (\alpha-9)^2+(\beta+10)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+10\alpha+25+\beta^2-8\beta+16 = \alpha^2+6\alpha+9+\beta^2-12\beta+36 \\ \alpha^2+10\alpha+25+\beta^2-8\beta+16 = \alpha^2-18\alpha+81+\beta^2+20\beta+100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+4\beta = 4 \\ 28\alpha-28\beta = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha-\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(3;-2)$$

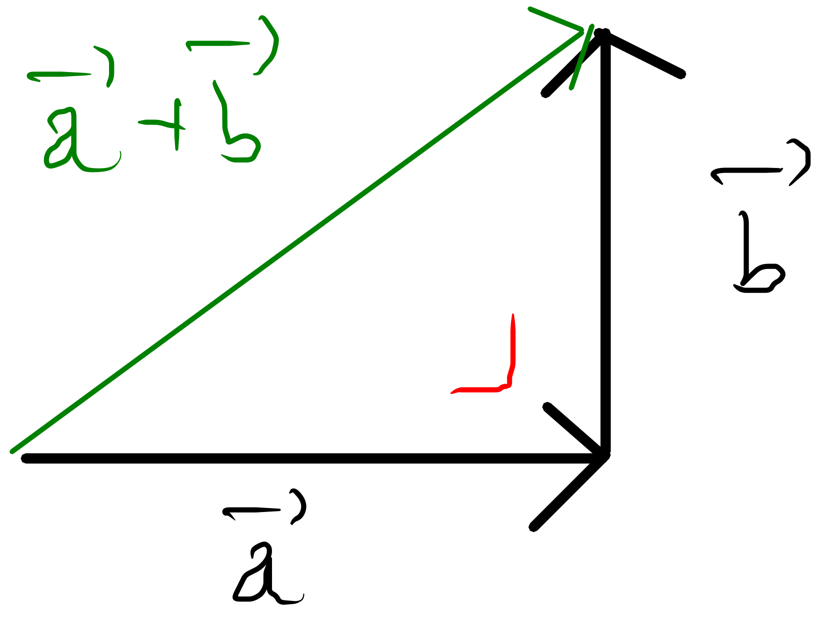
Produit scalaire

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 19 \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \Rightarrow \|\vec{a}\|^2 = 73$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{36+256} = \sqrt{292} \Rightarrow \|\vec{b}\|^2 = 292$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{4+361} = \sqrt{365} \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 365$$

$$73 + 292 = 365 \checkmark \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Critère de perpendicularité

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On a $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ et $\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \Leftrightarrow$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} = \cancel{a_1^2} + 2a_1b_1 + \cancel{b_1^2} + \cancel{a_2^2} + 2a_2b_2 + \cancel{b_2^2} \Leftrightarrow$$

$$0 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow}$$

$$0 = a_1b_1 + a_2b_2$$

Critère $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

$$53 \cdot 41 + (-41) \cdot 53 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Produit scalaire

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

On note $a_1 b_1 + a_2 b_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$

est appelé le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Dans V_3 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

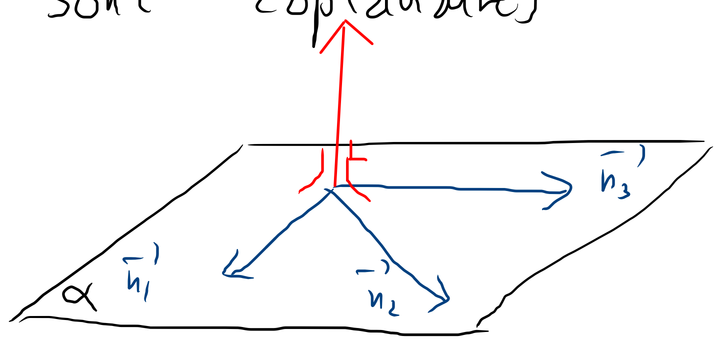
Exemple $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \perp \vec{v}$, on peut prendre $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dans V_3 : $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n} \perp \vec{w}$, on peut prendre $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right. = 4 + 0 - 4 - 0 - 0 - 0$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array} \qquad = 0$$

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont coplanaires



$\vec{w} \perp \alpha$

1.4.11

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

1) $\vec{W} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{W} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$

2) $K\vec{u} + \vec{W} = \begin{pmatrix} K \\ 3K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$

$\vec{V} = K\vec{u} + \vec{W} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ 3K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = K + 3\lambda \\ 11 = 3K - \lambda \end{cases} \left| \begin{array}{c} K \\ \cdot 3 \\ \cdot(-1) \end{array} \right| \begin{array}{c} \lambda \\ \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} -20 = 10\lambda \\ 30 = 10K \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ K = 3 \end{array}$$

Ainsi $K = 3$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$