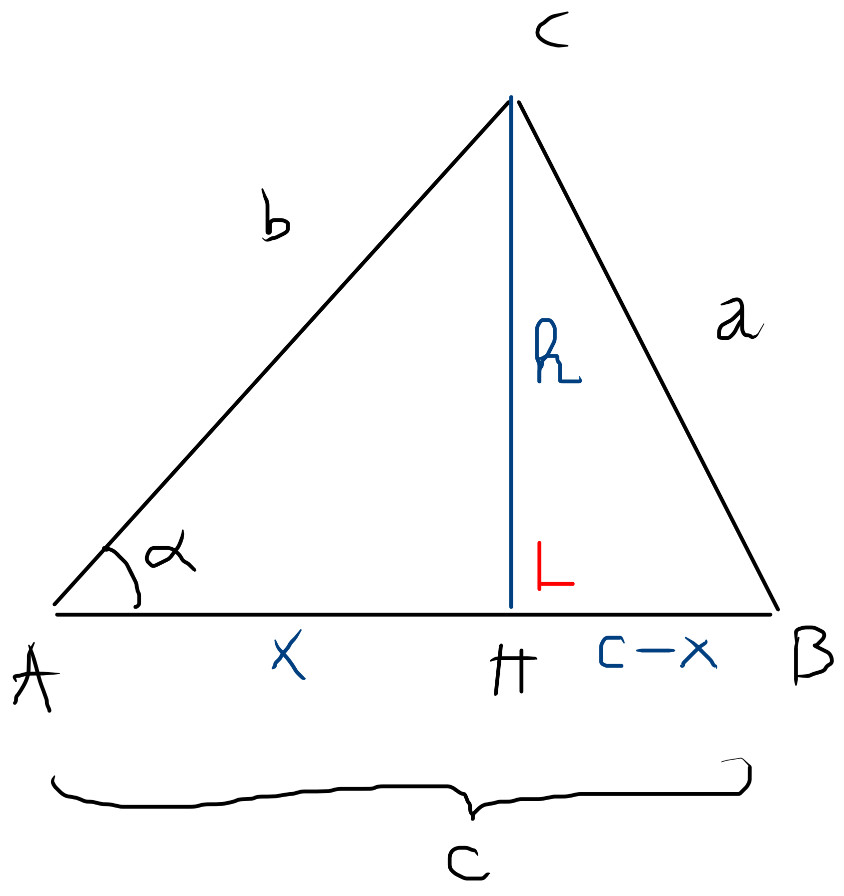
19.01.23

Théorème du cosinus



Soit un $\triangle ABC$. On suppose que le pied de la hauteur issue de C sur AB tombe entre A et B.

Posons $x = AH$, $CH = h$ et $HB = c - x$.

Par Pythagore : $a^2 = h^2 + (c-x)^2$

$$= h^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$= c^2 + \underbrace{x^2 + h^2} - 2cx$$

$$= c^2 + b^2 - 2cx$$

On a $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos(\alpha)$

Ainsi $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$

Propriétés du produit scalaire

Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ~~deux~~ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a :

1) $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4) $\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$
5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$
6) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

7) $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \underset{6)}{=} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

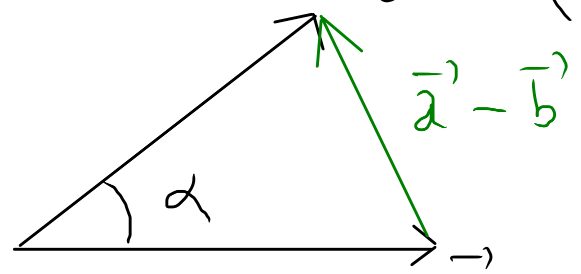
$= \|\vec{a}\|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right)}$

Donc le produit scalaire ne dépend pas de la base choisie.

8)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$



$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Par le théorème du cosinus :

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

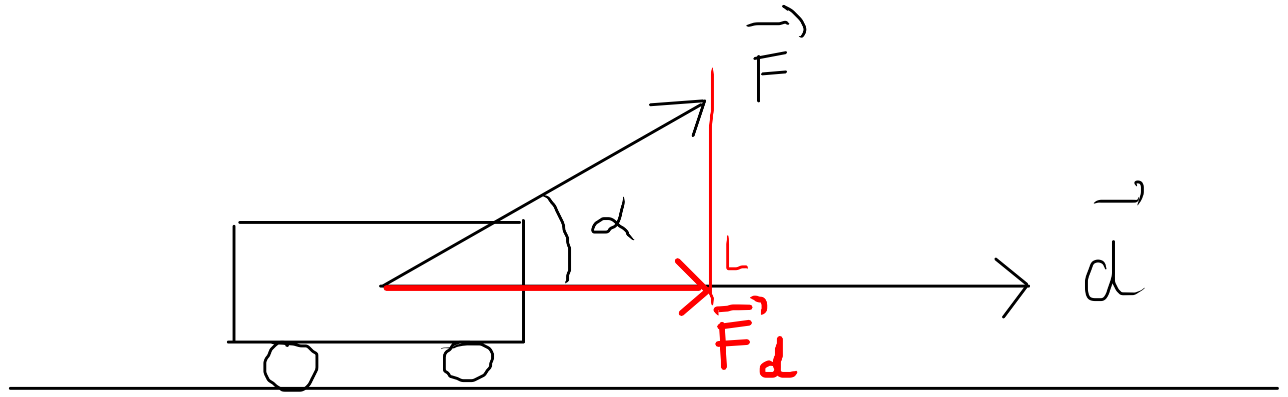
$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cancel{a_1^2} - 2a_1b_1 + \cancel{b_1^2} + \cancel{a_2^2} - 2a_2b_2 + \cancel{b_2^2} = (\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2}) + (\cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2}) - 2 \cdot \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$$

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2 \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\underbrace{a_1b_1 + a_2b_2} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)}$$



$$W = \vec{d} \cdot \vec{F} = \|\vec{d}\| \cdot \underbrace{\|\vec{F}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{F_d}\|$$