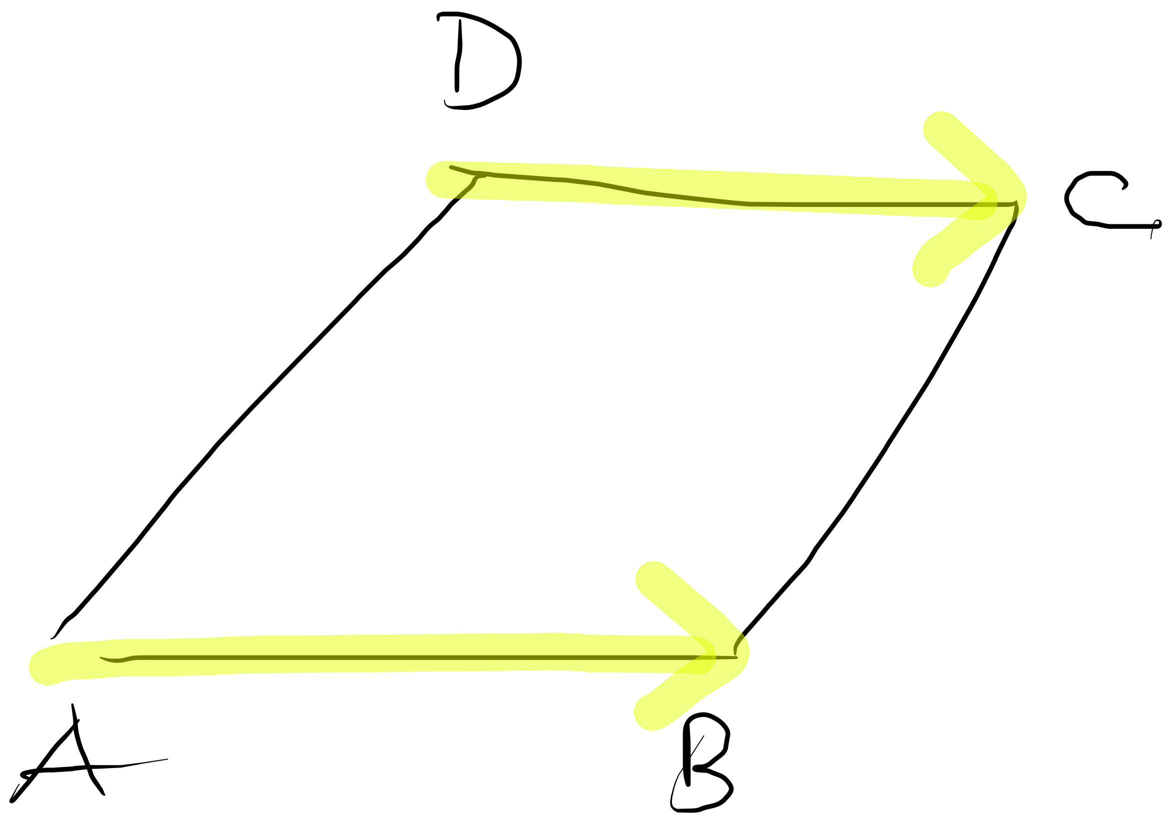
1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme b) $ABDC$ soit un parallélogramme

$ABCD$ $\#$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$\mathcal{E}_3$

$$M(13; -22; 2) \qquad N(-5; -10; 26) \qquad P(-38; 12; 60)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad \overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MP}$

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

A, B, C alignés $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{AB} = \lambda \vec{AC} \Leftrightarrow \left| \vec{AB} \ \vec{AC} \right| = 0$

$\begin{vmatrix} -4 & K-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - (K-1) = -K + 5 = 0$

$-$ $+$

$\Rightarrow K = 5$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7K-29 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7K-31 \\ 5-K \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2-K \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7K-31 & -6 \\ 5-K & 2-K \end{vmatrix} = (7K-31)(2-K) - (-6)(5-K)$

$= -7K^2 + 45K - 62 + 30 - 6K$

$= -7K^2 + 39K - 32$

On résout $\quad -7K^2 + 39K - 32 = 0$

$7K^2 - 39K + 32 = 0$

$\Delta = 625 \qquad K_1 = \frac{39+25}{14} = \frac{32}{7}$

$K_2 = \frac{39-25}{14} = 1$

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $B(3;5;8)$, $C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $B(3;1;0)$, $C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

$\mathcal{E}_3$

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ \alpha - 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\alpha - 5 = 9 \Rightarrow \alpha = 14$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -3 = K(3-\alpha) \\ \alpha+1 = K \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{\alpha+1}{4}(3-\alpha) \\ K = \dfrac{\alpha+1}{4} \end{cases}$$

Résolvons la 1ère équation :

$-12 = (\alpha+1)(3-\alpha)$

$-12 = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

$\alpha^2 - 2\alpha - 15 = 0$

$(\alpha - 5)(\alpha + 3) = 0$

$\alpha = 5$ et $\alpha = -3$