Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Effectuons la division en colonne avec reste de 127 par 9.

$$
\begin{array}{r|l}
127 & 9 \\
\cline{2-2}
-\ 9 & 1 \\
\cline{1-1}
37 & \\
-\ 36 & 4 \\
\cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

$10 \cdot 9 = 90$

$4 \cdot 9 = \underline{36}$

126

$$\boxed{\underset{\text{Dividende}}{127} = \underset{\text{quotient}}{14} \cdot \underset{\text{diviseur}}{9} + \underset{\text{reste}}{1}}$$

Théorème

Soit D et d deux entiers non nuls, il existe deux autres entiers q et r tels que :

1) $D = q \cdot d + r$

2) $r < d$

Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Effectuons la divisions en colonne de

$$D = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3 \quad \text{par} \quad 2x^2 - 1$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 4x^3 & -8x^2 & +2x & -3 & 2x^2-1 \\ \cline{6-6}
- & 4x^3 & & -2x & & 2x \quad -4 \\ \cline{2-5}
 & & -8x^2 & +4x & -3 & \\
- & & -8x^2 & & +4 & \\ \cline{3-5}
 & & \text{reste} & 4x & -7 &
\end{array}$$

$$2x(2x^2-1) = 4x^3 - 2x$$

$$-4(2x^2-1) = -8x^2+4$$

$$\begin{array}{rr}
 & 4x^3-8x^2-2x+4 \\
+ & 4x-7 \\ \hline
 & 4x^3-8x^2+2x-3
\end{array}$$

L'égalité fondamentale s'écrit

$$\boxed{4x^3-8x^2+2x-3 = (2x-4)(2x^2-1) + 4x-7}$$

$$D = (2x-4)\cdot d + 4x-7$$

Théorème

Soit D et $d \in \mathbb{R}[X]$. Il existe q et $r \in \mathbb{R}[X]$, tels que

1) $D = q \cdot d + r$

2) $\text{degré}(r) < \text{degré}(d)$

Ex 2.3.1

2.3.1

c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$ $\quad$ $B(x) = x^2 - 3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 \ldots + x - 5 & x^2 - 3 \\ \hline
- \quad x^4 \qquad - 3x^2 & x^2 \\
-3x^3 + 3x^2 + x - 5 & \\
-3x^3 \qquad + 9x & -3x \\
3x^2 - 8x - 5 & \\
3x^2 \qquad - 9 & +3 \\
-8x + 4 &
\end{array}
$$

$$A = (x^2 - 3x + 3)(x^2 - 3) + (-8x + 4)$$

e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$ $\qquad\qquad$ $B(x) = x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^8 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad + x^4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad + 1 & x^2 - x + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^8 - x^7 + x^6} & x^6 + x^5 - x^3 + x + 1 \\
\quad x^7 - x^6 & \\
\quad \underline{x^7 - x^6 + x^5} & \\
\qquad\quad -x^5 + x^4 & \\
\qquad\quad \underline{-x^5 + x^4 - x^3} & \\
\qquad\qquad\qquad x^3 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^3 - x^2 + x} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2 - x + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^2 - x + 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Comme le reste est nul, on dit que B divise A.

On écrit B / A.

$A = (x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)(x^2 - x + 1)$