1OS PM – Mardi 4 avril 2023 Nom & prénom : ....

Théorie des nombres – TE 793R

Problème 1 (4 points)
Soit a, b et $c \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que si $a|\,b$ et que $a|\,c$, alors $a|\,(b+c)$.

Problème 2 (4 points)
Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

Problème 3 (4 points)
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que n^2+n+41 n'est pas un nombre premier.

Problème 4 (4 points)
Trouver une série de 51 nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Problème 5 (4 points)

a) Trouver le reste de la division par 10 du nombre 5555^{64}.

b) Calculer $107 \cdot 109 \cdot 111 \cdot 113 \pmod{110}$.

c) Calculer $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \pmod{2014}$.

d) Calculer $207^{13} \pmod{210}$.

e) Calculer $1024^{1024} \pmod{2}$.

f) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2024^{2024} par 23.

Problème 6 (4 points)
Montrer que si p est un nombre premier strictement supérieur à 5, alors $(p-1)^2$ divise $p\,!$.

Problème 7 (4 points)
Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

Problème 8 (4 points)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5.

Problème 9 (4 points)
Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.

Problème 1 (4 points)
Soit a, b et $c \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que si $a|\,b$ et que $a|\,c$, alors $a|\,(b+c)$.

Si $a|b$, il existe $K_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $a \cdot K_1 = b$.
Si $a|c$, il existe $K_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $a \cdot K_2 = c$.

Ainsi, $b+c = a \cdot K_1 + a \cdot K_2 = a \cdot (K_1 + K_2)$.

Posons $K = K_1 + K_2$. On a $aK = b+c$. Donc $a|(b+c)$.

Problème 2 (4 points)
Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

Soit $K \in \mathbb{Z}$. Il faut montrer que

$$(2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$$

$(2K+1)^2 = 4K^2 + 4K + 1 = 4K(K+1) + 1$

Pour tout $K \in \mathbb{Z}$, soit K, soit $K+1$ est pair. Donc $K(K+1)$ est pair. Ainsi $4 \cdot K(K+1)$ est un multiple de 8.
On a $4K(K+1) \equiv 0 \pmod 8$ et $(2K+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$.

Problème 3 (4 points)
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + n + 41$ n'est pas un nombre premier.

Il suffit de choisir $n = 41$. On a

$41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41+1+1) = 41 \cdot 43$.

Donc $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ qui n'est pas premier.

Problème 4 (4 points)
Trouver une série de 51 nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Posons $\alpha = 52! + 1$.

Les nombres $\alpha + 1, \dots, \alpha + 51$ ne sont pas premiers.

En effet, soit $1 \leq K \leq 51$. Alors $2 \leq K+1 \leq 52$

$$\alpha + K = 52! + (K+1) = (K+1)\left(\frac{52!}{K+1} + 1\right)$$

Comme $2 \leq K+1 \leq 52$, le nombre $\frac{52!}{K+1}$ est un nombre entier. Ainsi $\alpha + K$ n'est pas un nombre premier.

Problème 5 (4 points)

a) Trouver le reste de la division par 10 du nombre 5555^{64}.
b) Calculer $107 \cdot 109 \cdot 111 \cdot 113 \pmod{110}$.
c) Calculer $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \pmod{2014}$.
d) Calculer $207^{13} \pmod{210}$.
e) Calculer $1024^{1024} \pmod{2}$.
f) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2024^{2024} par 23.

a) $5555^{64} \equiv 5^{64} \pmod{10}$

$5^{64} \equiv 5 \pmod{10}$

b) $107 \cdot 109 \cdot 111 \cdot 113 \equiv (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{110}$

c) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{2014}$

d) $207^{13} \equiv (-3)^{13} \equiv (-3)^4 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)$

$(-3)^2 \equiv 9 \pmod{210}$
$(-3)^4 \equiv 81 \pmod{210}$
$(-3)^8 \equiv 6561 \equiv 51 \pmod{210}$
$207^{12} \equiv 81 \cdot 51 \equiv 4131 \equiv 141 \pmod{210}$
$207^{13} \equiv -423 \equiv -3 \equiv 207 \pmod{210}$

e) $1024^{1024} \equiv 0 \pmod 2$

f) $2024^{2024} \equiv 0^{2024} \equiv 0 \pmod{23}$

$[88 \cdot 23 = 2024]$

Problème 6 (4 points)
Montrer que si p est un nombre premier strictement supérieur à 5, alors $(p-1)^2$ divise $p\,!$.

$(p > 5, \text{ premier}) \Rightarrow (p-1)^2 \mid p!$

1) $p! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)\, p \Rightarrow (p-1) \mid p!$

2) Montrons que $p-1 \mid 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-2)\, p$

$p-1$ est un nombre pair avec $p-1 \geq 6$.

$p-1$ n'est pas premier. La décomposition de $p-1$ est composée de nombres dans l'ensemble $\{2, 3, 4, \ldots, p-2\}$.

Ainsi $p-1 \mid 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-2)$.

1) + 2) montrent que $(p-1)^2 \mid p!$

Problème 7 (4 points)
Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

$2^n + 2^{n+1} = 2^n(1+2) = 3 \cdot 2^n$.

Donc $3 \mid 2^n + 2^{n+1}$

Problème 8 (4 points)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5.

$$n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

1) si $n = 5K$, alors n^5-1 est divisible par 5.

2) si $n = 5K+1$, alors $n-1$ est divisible par 5, et n^5-1 est divisible par 5.

3) Si $n = 5K+2$, alors $n^2+1 = (5K+2)^2+1 = 25K^2+20K+5 = 5(5K^2+4K+1)$ est divisible par 5, et n^5-1 est divisible par 5.

4) Si $n = 5K+3$, alors $n^2+1 = (5K+3)^2+1 = 25K^2+30K+10 = 5(5K^2+6K+2)$ est divisible par 5, et n^5-1 est divisible par 5.

5) Si $n = 5K+4$, alors $n+1 = 5K+5 = 5(K+1)$ est divisible par 5, et n^5-1 est divisible par 5.

Ces 5 cas montrent le résultat.

Problème 9 (4 points)
Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.

$$67^{89} \equiv 1^{89} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$67^{89} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Donc $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.