2M1 – Mercredi 30 novembre 2022 Nom & prénom : ....

Fonctions et limites – TE 785B

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	10	7	3	4	9	4	5	42
Points obtenus								

Problème 1 (10 points)
Déterminer l'ensemble de définition et le signe des trois fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x - 15}{x^2 + 4\,x + 4}$ b) $f(x) = \sqrt{-3\,x + 18}$ c) $f(x) = 6\,x^2 + 7\,x - 3$

a) $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

x		-5		-2		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

b) condition : $-3x + 18 \geq 0$

$3x \leq 18$

$x \leq 6$

$ED(f) = \left]-\infty ; 6\right]$

x		6	
$f(x)$	$+$	0	

c) $f(x) = 6x^2 + 7x - 3 = (3x-1)(2x+3)$

$ED(f) = \mathbb{R}$

x		$-3/2$		$1/3$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Problème 2 (7 points)
Déterminer l'ensemble de définition des deux fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{1 - x}}$

b) $f(x) = \log\left(x^2 - 2\,x - 24\right)$

a) Condition : $\dfrac{x^2-9}{1-x} \geq 0$

Signe de cette expression :

x		-3		1		3	
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$-x+1$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\dfrac{x^2-9}{-x+1}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$ED(f) = \left]-\infty\,;-3\right] \cup \left]1\,;3\right]$

b) Condition $x^2 - 2x - 24 > 0$

$(x-6)(x+4) > 0$

Signe de cette expression :

x		-4		6	
$x^2-2x-24$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) = \left]-\infty\,;-4\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$

Problème 3 (3 points)
Déterminer l'application réciproque de la fonction bijective suivante.

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{4\}$$
$$x \mapsto \frac{4\,x+3}{x-1}$$

On pose $y = \dfrac{4x+3}{x-1}$ et on détermine x.

$$(x-1)\cdot y = 4x+3$$
$$xy - y = 4x+3$$
$$xy - 4x = y+3$$
$$(y-4)x = y+3$$
$$x = \frac{y+3}{y-4}$$

L'application réciproque :

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$
$$x \longmapsto \frac{x+3}{x-4}$$

Problème 4 (4 points)
Déterminer les fonctions injectives ou surjectives.

a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$x \mapsto 5\,x - 4$

b) $f_4 : [0\,; +\infty[\to [9\,; +\infty[$
$x \mapsto x^2 + 9$

a) Injective : $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $f_1(a) = f_1(b)$

$\Rightarrow 5a - 4 = 5b - b \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow f_1$ injective

Surjective : non ! il n'existe pas $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1(a) = 0$.

En effet : $5a - 4 = 0 \Leftrightarrow 5a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$

b) Injective : $a, b \in [0, +\infty[$ tels que $f_4(a) = f_4(b)$

$\Rightarrow a^2 + 9 = b^2 + 9 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow$

$(a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ($a = -b$ est impossible) $\Rightarrow f_4$ injective.

Surjective : Soit $a \in [9\,; +\infty[$. On a

$x^2 + 9 = a \Leftrightarrow x^2 = a - 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{a-9} \Rightarrow f_4$ surjective.

Problème 5 (9 points)
Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2\,x^2-5\,x-12}{2\,x^2-7\,x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-5x-12}{2x^2-7x-4}\overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\cancel{(x-4)}(2x+3)}{\cancel{(x-4)}(2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x+3}{2x+1}=\dfrac{11}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-1-4}{x-5(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\cancel{x-5}^{\,1}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}\right)\overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=}}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{x-2}^{\,1}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

Problème 6 (4 points)
Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{36\,x^4 - 2\,x^3 + 10}{-4\,x^4 + 10000}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^2}{x^8 + x^4 + 1}$

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{36\cancel{x^4}(1+\dots)}{-4\cancel{x^4}(1+\dots)} = \frac{36}{-4} = -9$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^6}^{\,1}(1+\dots)}{\cancel{x^8}_{\,x^2}(1+\dots)} = 0$$

Problème 7 (5 points)
Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \underbrace{\frac{(x-6)^2}{x}}_{f(x)}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \underbrace{\frac{x^2+7x+12}{|x+3|}}_{f(x)} \overset{ind}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{(x-6)^2}{x} = \infty$

Signe de la fonction

x		0		6	
f(x)	−	‖	+	0	+

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+7x+12}{x+3}, & \text{si } x > -3 \\ \frac{x^2+7x+12}{-(x+3)}, & \text{si } x < -3 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \frac{x^2+7x+12}{-(x+3)} \overset{ind}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \frac{\cancel{(x+3)}(x+4)}{-\cancel{(x+3)}} = -1$

$-$