2M8 – Mercredi 8 novembre 2023 Nom & prénom : ....

Puissance, exp et log – TE 803A

Problème	1	2	3	4	5	6	**Total**
Points	4	4	6	3	6	4	27
Points obtenus							

Problème 1 (4 points)
Simplifier les expressions

a) $(-x\,y^2)^4 \cdot (-1)^5 \cdot (-x^2\,y)^3$

b) $\left(\frac{-a^3}{b^2}\right)^4 \div \left(\frac{a^4}{b^5}\right)^3$

a) $x^4 y^8 \cdot (-1) \cdot (-x^6 y^3) = \underline{x^{10} y^{11}}$

b) $\frac{a^{12}}{b^8} \cdot \frac{b^{15}}{a^{12}} = \underline{b^7}$

Problème 2 (4 points)
Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans exposant négatif

a) $\left(\frac{4}{3}\,z^3\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{4}\,z^3\right)^6$

b) $(11\,s^2\,t^{-4}) \cdot (-10\,s^{-8}\,t^{-3})$

a) $\frac{4^{-3}}{3^{-3}} z^{-9} \cdot \frac{3^6}{4^6} \cdot z^{18} = 4^{-9} \cdot 3^9 \cdot z^9 = \underline{\left(\frac{3z}{4}\right)^9}$

b) $\frac{11 s^2}{t^4} \cdot \frac{-10}{s^8 t^3} = \underline{\frac{-110}{s^6 t^7}}$

Problème 3 (6 points)
Résoudre les équations suivantes:

a) $e^x = \frac{1}{e}$

b) $0.001^x = 0.000001$

c) $x^{-3/2} = 0.12345$

d) $\log_x 1000 = 3$

e) $13^{-1} \cdot 13^{x^2} = 13^{x-1}$

f) $e^{2x} + e^x = -1$

a) $e^x = e^{-1} \Rightarrow \underline{x = -1}$

b) $10^{-3x} = 10^{-6} \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow \underline{x = 2}$

c) $x^{-\frac{3}{2}} = 0.12345 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{0.12345^2}} \cong \underline{4{,}033412}$

d) $\log_x(1000) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow \underline{x = 10}$

e) $13^{x^2-1} = 13^{x-1} \Rightarrow x^2 - 1 = x - 1$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) = (x-1)$

$(x-1)(x+1-1) = 0$

$x(x-1) = 0$

$\underline{S = \{0, 1\}}$

f) $\underbrace{e^{2x} + e^x}_{>0} = -1$ impossible

Problème 4 (3 points)
Résoudre l'équation ci-dessous

$$2 \cdot \log_4(x) = \log_4(x-1) + 1$$

$$\log_4(x^2) = \log_4(x-1) + \log_4(4)$$

$$\log_4(x^2) = \log_4(4(x-1))$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 2}$$

<u>Preuve :</u>

$$2\log_4(2) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\log_4(1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Problème 5 (6 points)
Résoudre l'équation ci-dessous

$$e^{6x-1} \cdot e^3 + 3 \cdot e^{3x+1} = 10$$

$$e^{6x+2} + 3 \cdot \underbrace{e^{3x+1}}_{y} - 10 = 0$$

$$\left(e^{3x+1}\right)^2 + 3 \cdot e^{3x+1} - 10 = 0$$

$$y^2 + 3 \cdot y - 10 = 0$$

$$(y+5)(y-2) = 0$$

1°) $y = -5 \Rightarrow e^{3x+1} = -5$ impossible

2°) $y = 2 \Rightarrow e^{3x+1} = 2$

$$\Rightarrow 3x + 1 = \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2) - 1}{3} \cong -0.102284$$

Problème 6 (4 points)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ et $y > 0$. En utilisant uniquement la propriété

$$(*) \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

démontrer les deux points ci-dessous.

a) $\log_a(1) = 0$

b) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

a) $\log_a(x) = \log_a(1 \cdot x) \overset{(*)}{=} \log_a(1) + \log_a(x)$

$\Rightarrow \log_a(1) = 0$

b) $0 \overset{a)}{=} \log_a(1) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$