Formules de dérivation (suite) 01.02.24

9) $\left(g\circ f(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' =$

$$\left[\sin(x^2)\right]' = \cos(x^2)\cdot(x^2)' = \cos(x^2)\cdot 2x = 2x\cos(x^2)$$

$$\left[g(f(a))\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{g\circ f(a+h) - g\circ f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

posons $K = f(a+h) - f(a)$, $\lim_{h\to 0} K = 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(a)+K) - g(f(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(a)+K) - g(f(a))}{K}\cdot\frac{K}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(a)+K) - g(f(a))}{K}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{K}{h}$$

$$= \boxed{\lim_{h\to 0}\frac{g(f(a)+K) - g(f(a))}{K}}\cdot\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$$\boxed{\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))\cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{dérivée interne}}}$$

10) $$\left[\tan(x)\right]' = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$u = \sin(x)$; $u' = \cos(x)$

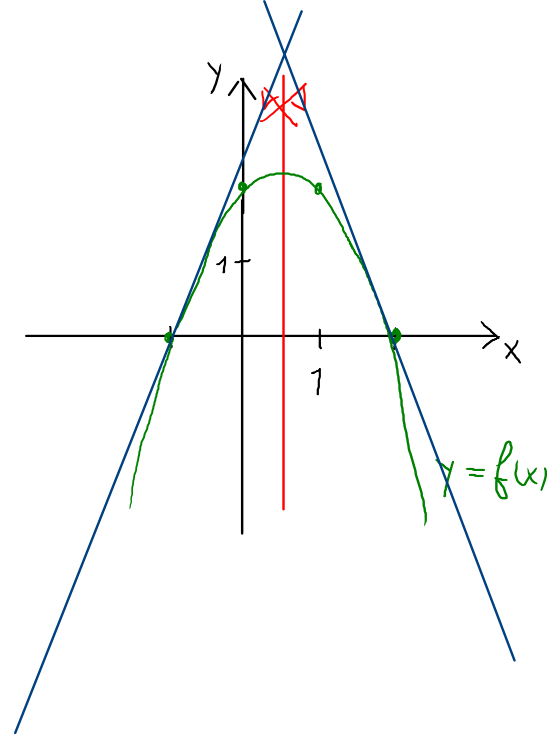
$v = \cos(x)$; $v' = -\sin(x)$

$$= \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \boxed{1 + \tan^2(x)}$$

2.9.2 On donne la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.



$$f'(x) = -2x + 1$$

$$f(x) = -(x^2 - x - 2)$$

$$= -(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

b) Equation de la tangente en un point de la courbe $A(a, f(a))$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} : \quad \frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a) \iff y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$$f(x) = -x^2 + x + 2 \quad ; \quad f'(x) = -2x + 1$$

- $x = -1$; $f(-1) = 0$; $f'(-1) = 3$ $\Rightarrow$ $y = 3(x+1)$
- $x = 0$; $f(0) = 2$; $f'(0) = 1$ $\Rightarrow$ $y = x + 2$
- $x = 2$; $f(2) = 0$; $f'(2) = -3$ $\Rightarrow$ $y = -3(x-2)$