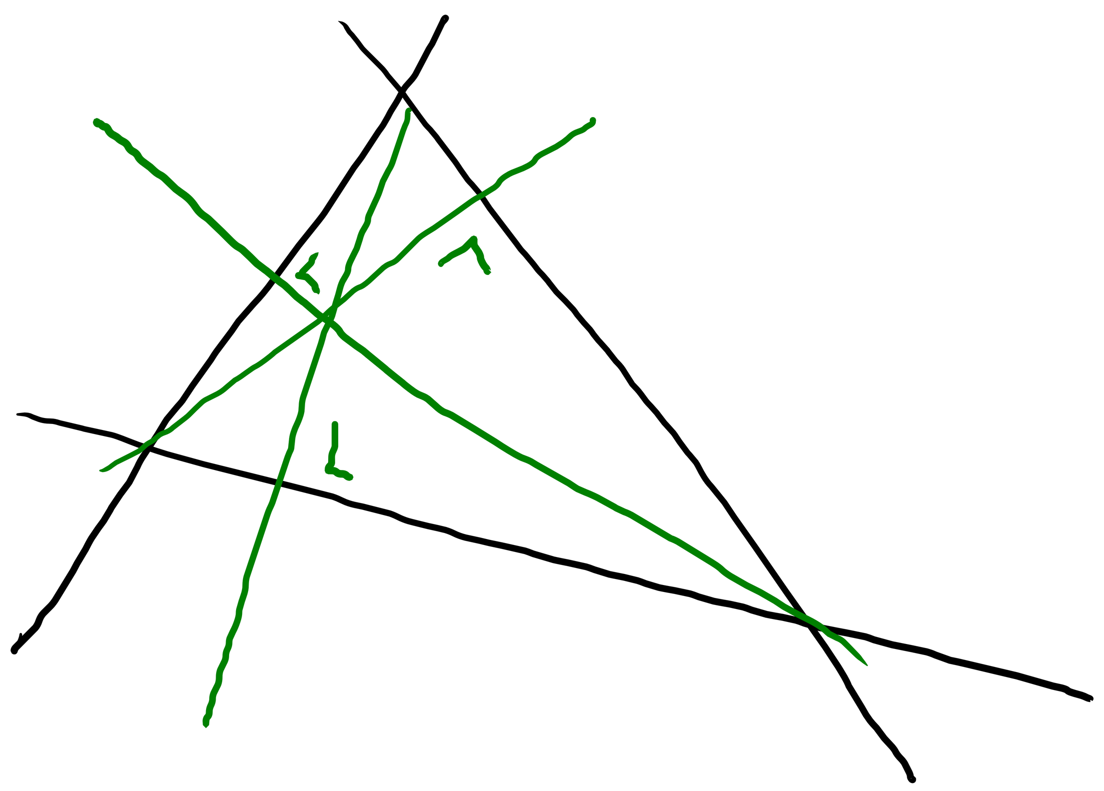
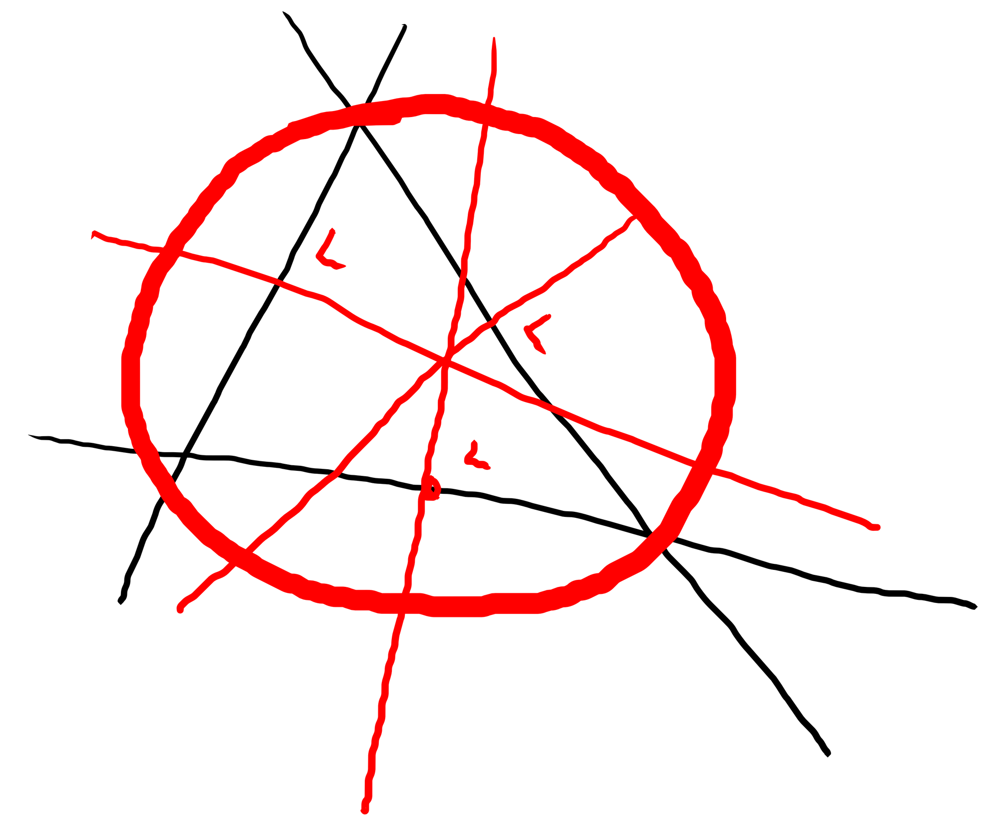
Droites remarquables dans un triangle

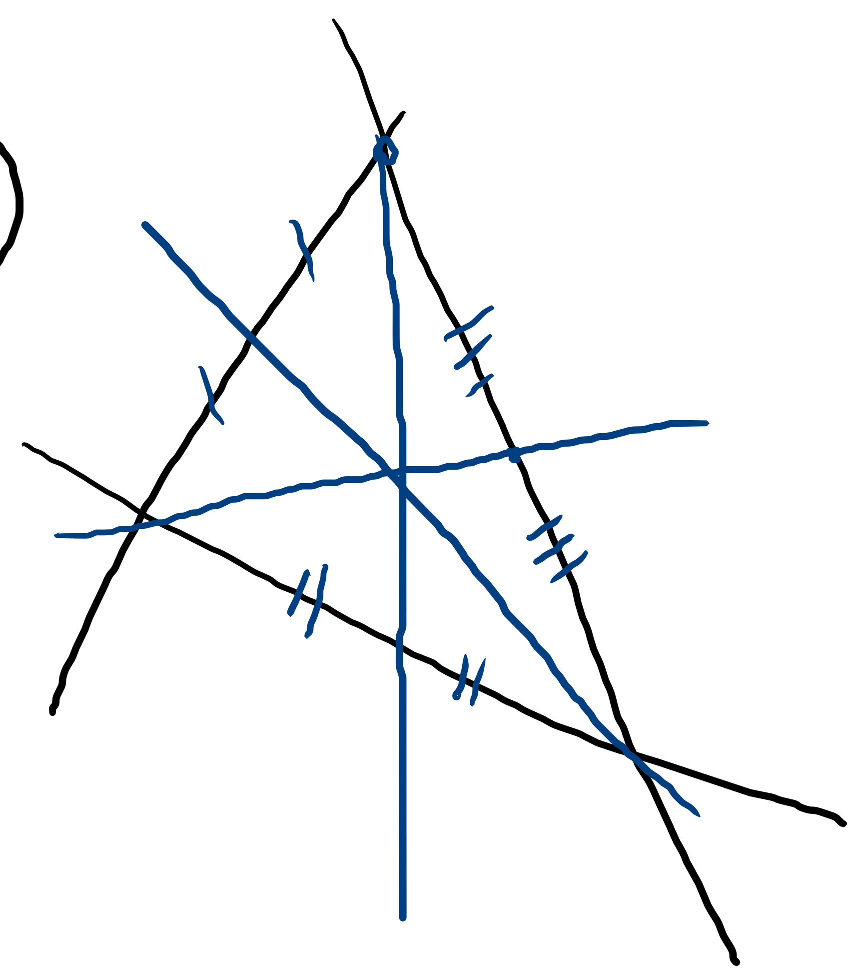
01.05.24

① 

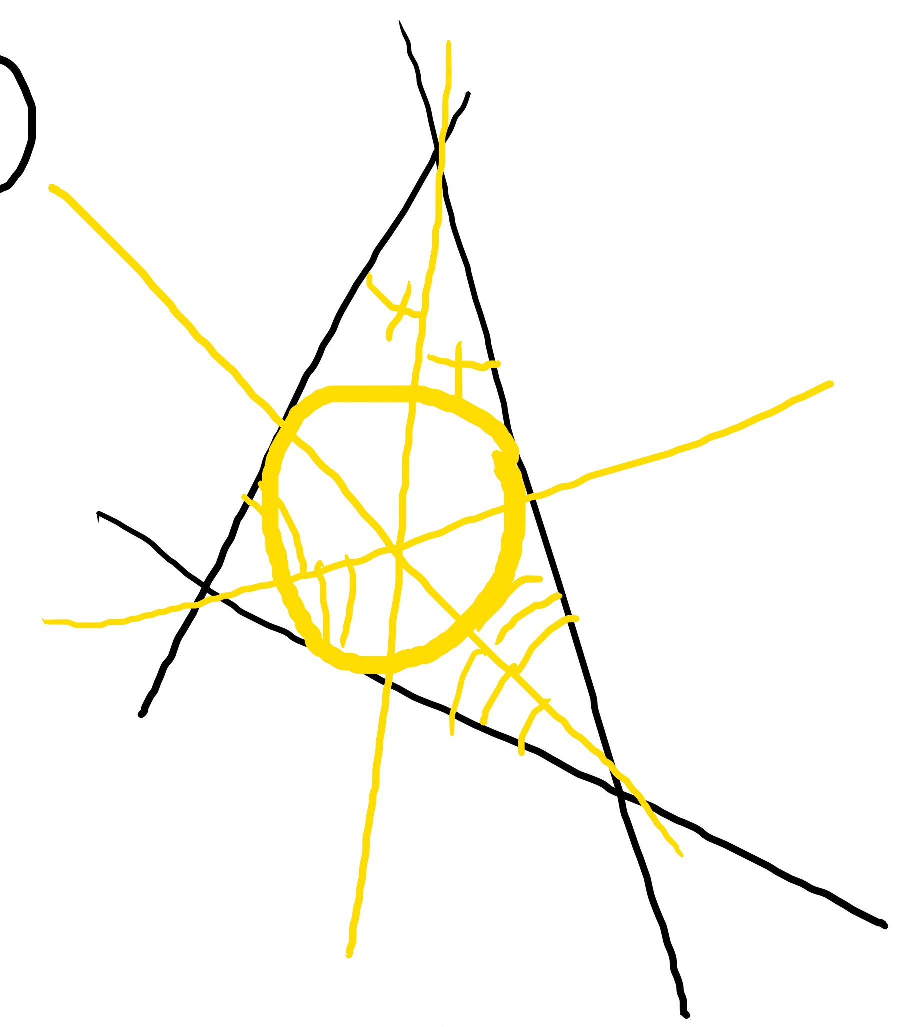
Hauteur : orthocentre

② 

Médiatrice : centre du cercle circonscrit

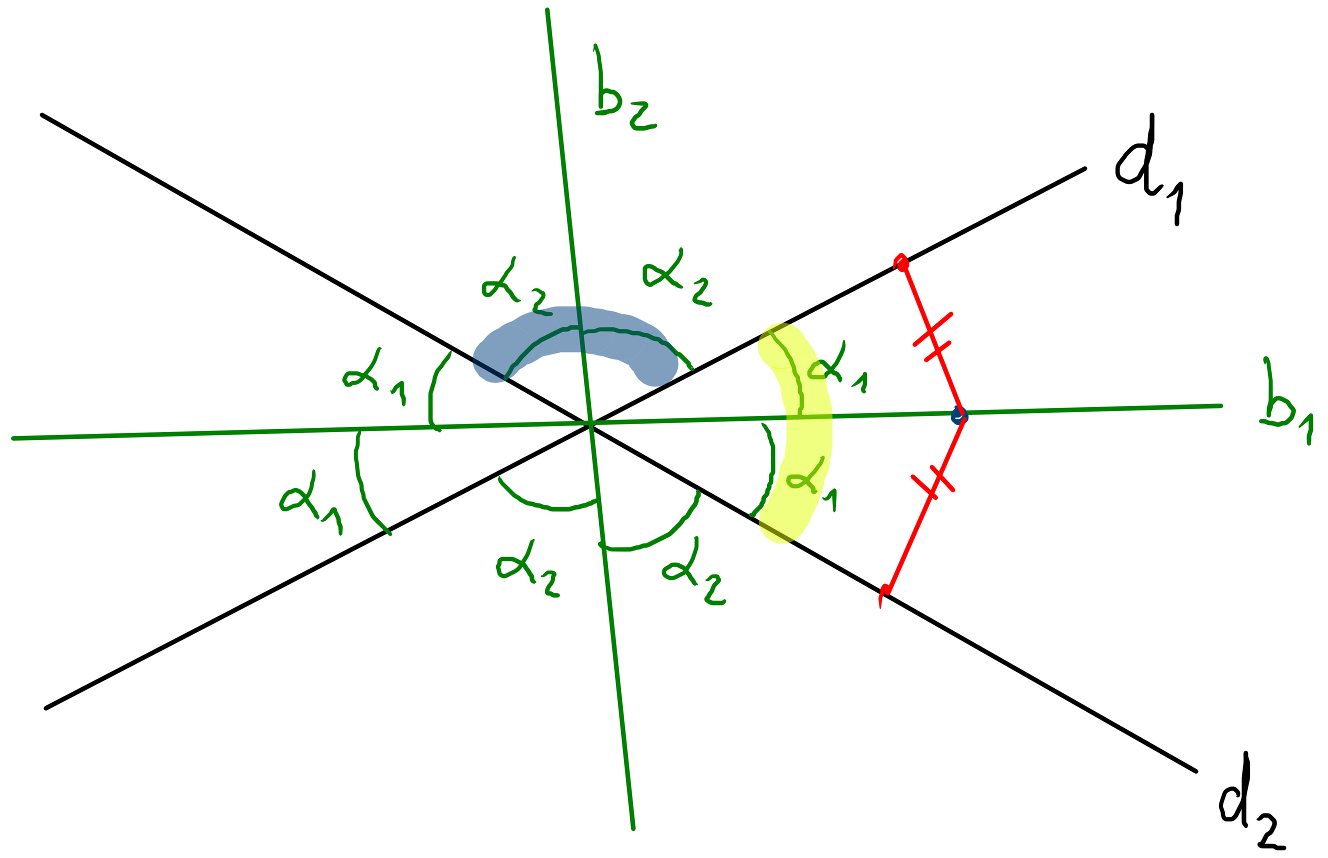
③ 

Médiane : centre de gravité

④ 

Bissectrices : centre du cercle inscrit

Bissectrices de deux droites données



$b_1 \perp b_2$

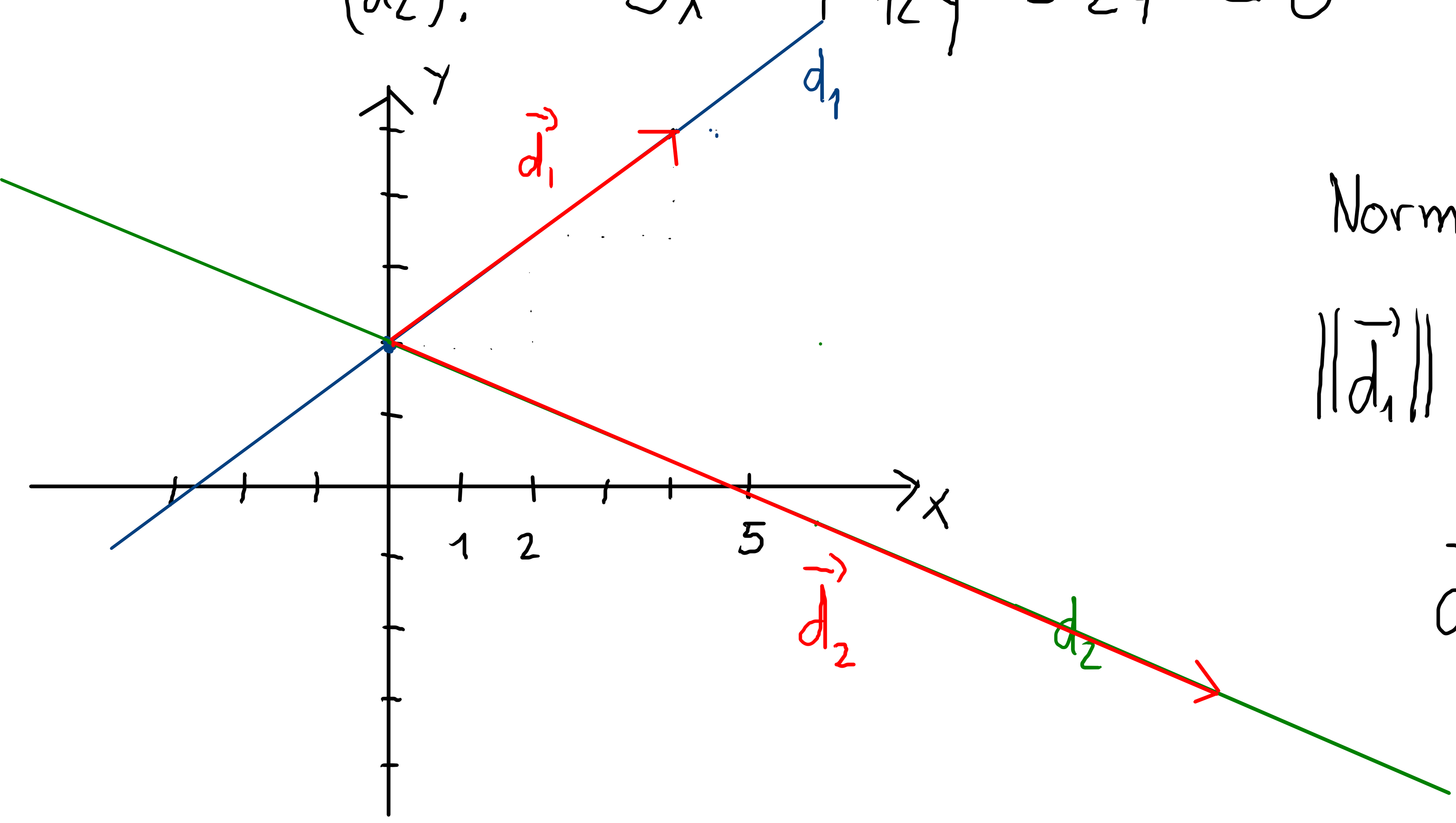
En effet : $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \pi$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

Déterminons les bissectrices des droites

(d_1): $3x - 4y + 8 = 0$ $\quad m_1 = \frac{3}{4}$ $\quad \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad A(0;2)$

(d_2): $5x + 12y - 24 = 0$ $\quad m_2 = \frac{-5}{12}$ $\quad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad A(0;2)$



Normons $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$

$\|\vec{d_1}\| = 5$; $\|\vec{d_2}\| = 13$

$\vec{d_1} \sim \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d_2} \sim \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$ $\quad \cdot (5 \cdot 13)$

$\sim \begin{pmatrix} 52 \\ 39 \end{pmatrix} = \vec{e_1}$ $\quad \sim \begin{pmatrix} 60 \\ -25 \end{pmatrix} = \vec{e_2}$

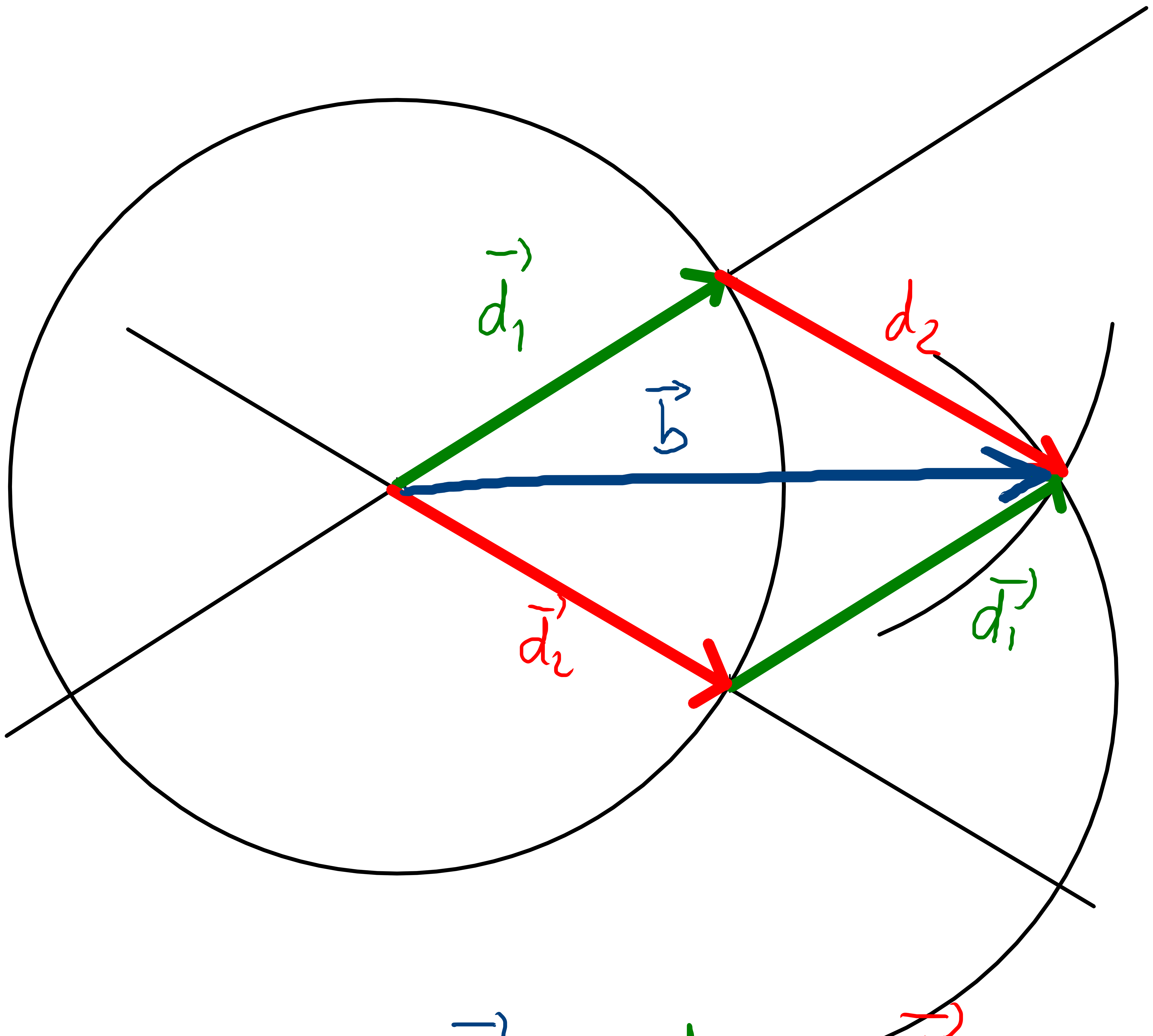
Vecteur directeur d'une bissectrice :

(b_1) : $\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 112 \\ 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 56 \\ 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b_2) : $\vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b_1) : $x - 8y + c_1 = 0 \quad \overset{A}{\Rightarrow} \quad \underline{x - 8y + 16 = 0}$

(b_2) : $8x + y + c_2 = 0 \quad \underset{A}{\Rightarrow} \quad \underline{8x + y - 2 = 0}$



$$\vec{b} = d_1 + \vec{d_2}$$

3.2.12 Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y + 5$ et $4y = 6x + 7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.

(d_1) : $2x - 3y - 5 = 0$

(d_2) : $6x - 4y + 7 = 0$

① Point d'intersection de d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6x - 4y = -7 \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-20-21}{-8+18} = \frac{-41}{10}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-14-30}{-8+18} = \frac{-44}{10}$$

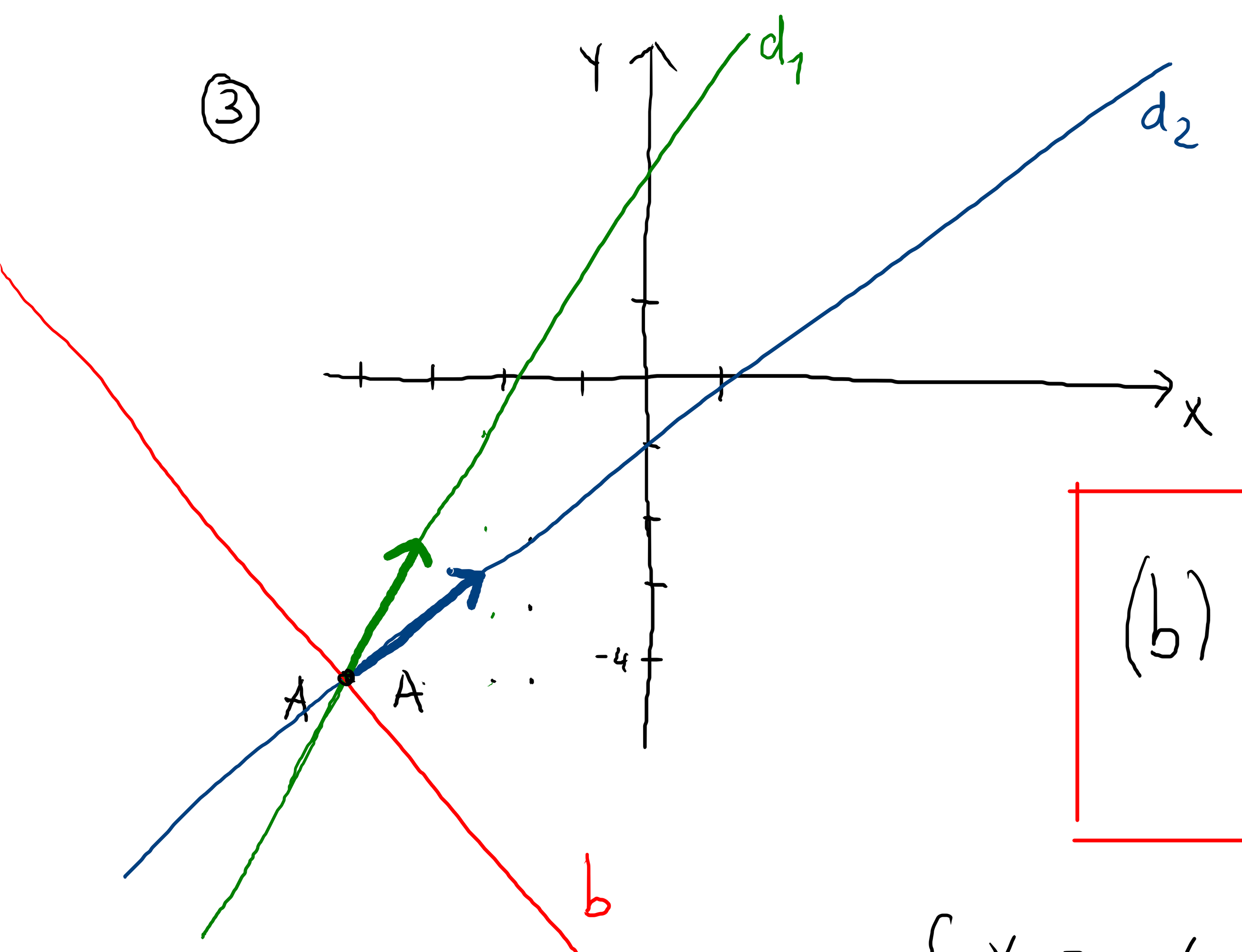
$A\left(-\frac{41}{10} ; -\frac{44}{10}\right)$

② Vecteurs directeurs de même norme :

$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{e_1}$

$\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{e_2}$

③



La bissectrice cherchée a une pente négative

$\vec{b} = \vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(b) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.1 \\ -4.4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} x = -4.1 + k \\ y = -4.4 - k \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{vmatrix}$$

(b) : $x + y = -8.5$

$$\boxed{(b) : 2x + 2y + 17 = 0}$$

Les bissectrices : version 2

Voici une deuxième méthode pour déterminer les équations des deux bissectrices de deux droites données non parallèles.

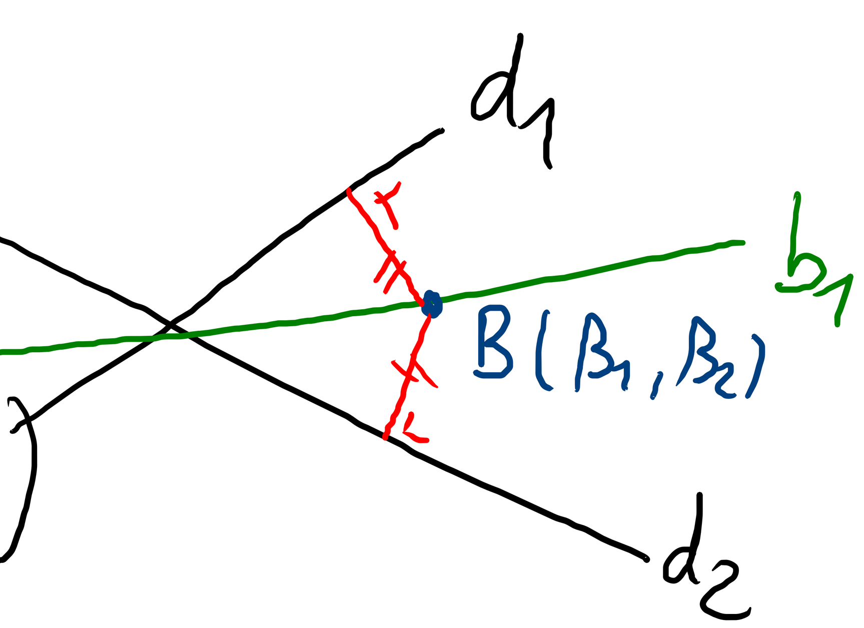
(d_1) : $3x - 4y + 8 = 0$

(d_2) : $5x + 12y - 24 = 0$

L'ensemble des points équidistants à d_1 et d_2 se trouvent sur les bissectrices b_1 et b_2

$B(B_1, B_2) \in b_1$

$$\delta(B, d_1) = \frac{|3 \cdot B_1 - 4 \cdot B_2 + 8|}{5} = \frac{|5 \cdot B_1 + 12 B_2 - 24|}{13} = \delta(B, d_2)$$



$$\frac{3x - 4y + 8}{5} = \pm \frac{5x + 12y - 24}{13}$$

"+" :

$13(3x - 4y + 8) = 5(5x + 12y - 24)$

$39x - 52y + 104 = 25x + 60y - 120$

$14x - 112y + 224 = 0$

$\underline{x - 8y + 16 = 0}$

"−" :

$13(3x - 4y + 8) = -5(5x + 12y - 24)$

$39x - 52y + 104 = -25x - 60y + 120$

$64x + 8y - 16 = 0$

$\underline{8x + y - 2 = 0}$