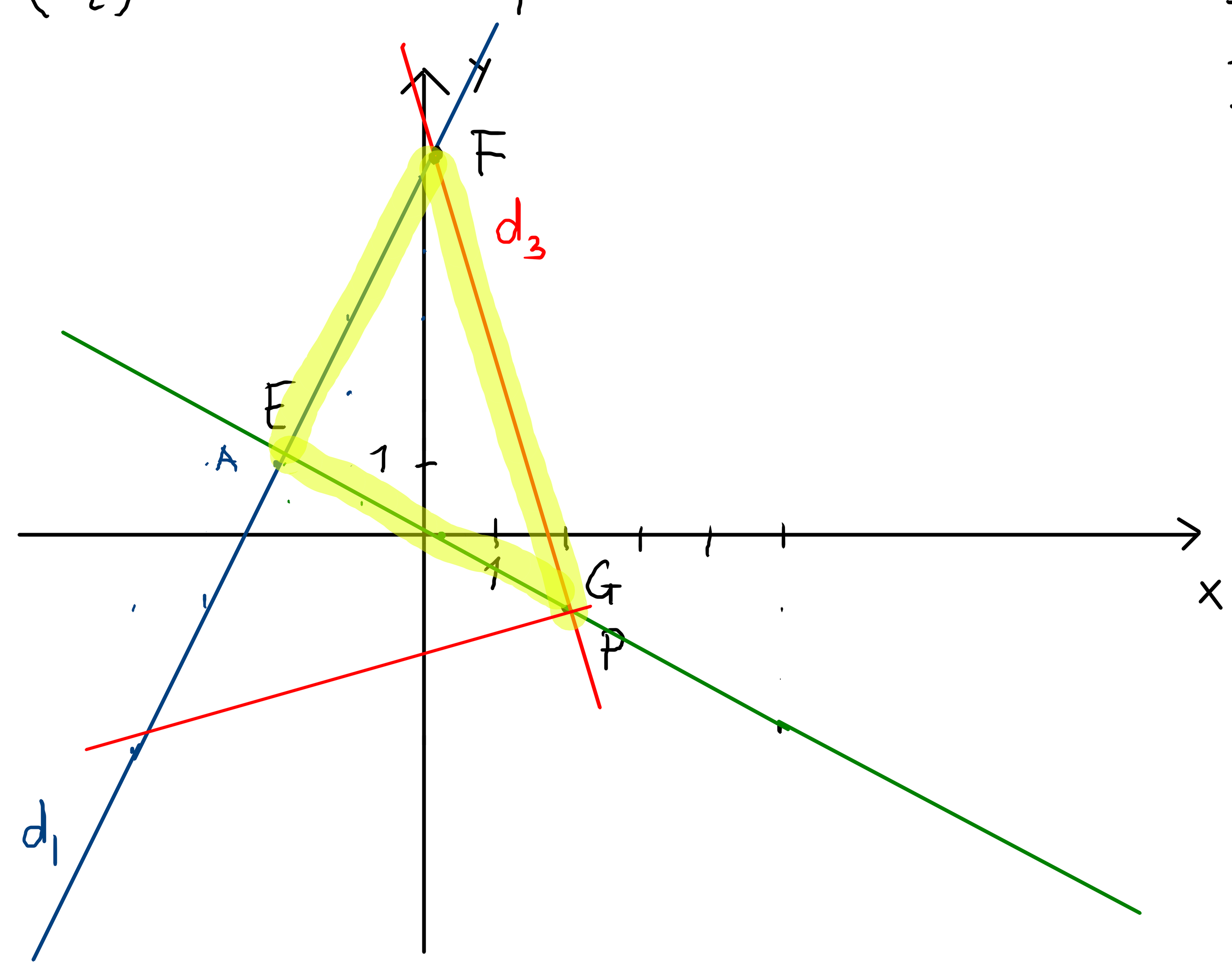
02.05.24

3.2.15 Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par $P(2;-1)$ et qui forment avec les droites d'équation $y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$ des triangles isocèles en l'intersection de ces droites.

(d_1): $2x - y + 5 = 0$ $\quad A(-2 \ ; \ 1)$ $\quad \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d_2) $3x + 6y - 1 = 0$ $\quad B_1(\frac{1}{3} \ ; \ 0)$ $\quad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad d_1 \perp d_2$

$B_2(5 \ ; -\frac{7}{3})$



But: déterminer $d_3 \ni P$, tel que si
$d_3 \cap d_1 = F$, $d_3 \cap d_2 = G$ et
$d_1 \cap d_2 = E$, on a $EF = EG$

Méthode: La droite cherchée est la perpendiculaire à la bissectrice de pente positive de d_1 et d_2

Déterminons les bissectrices:

$$\frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x + 6y - 1}{\sqrt{45}} \qquad \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{2x - y + 5}{\cancel{\sqrt{5}}_1} = \pm \frac{3x + 6y - 1}{3\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$2x - y + 5 = \pm \frac{3x + 6y - 1}{3}$$

$$6x - 3y + 15 = \pm (3x + 6y - 1)$$

"+": $3x - 9y + 16 = 0$ $\qquad$ "−": $9x + 3y + 14 = 0$

Droites cherchées:

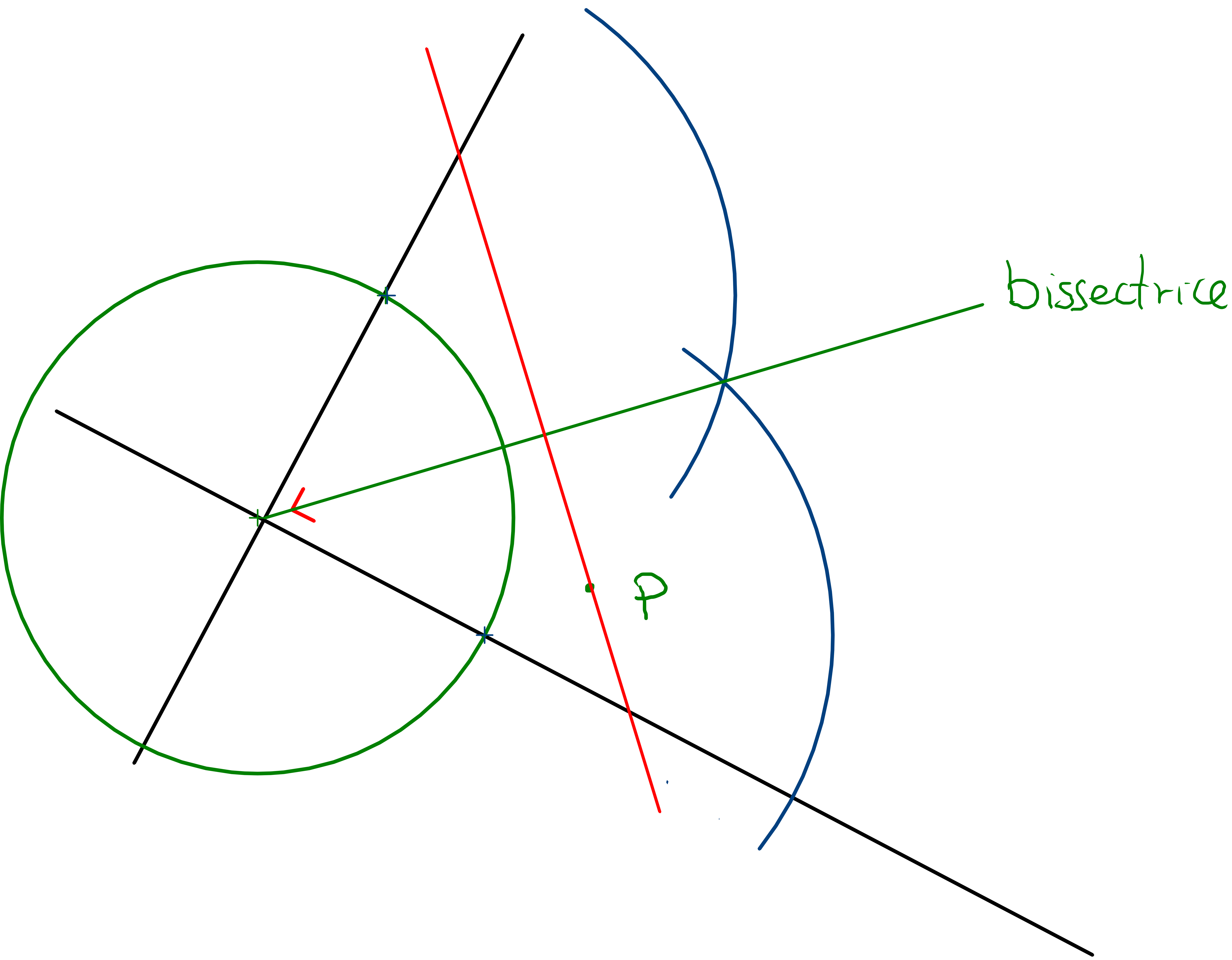
$3x + y + c_1 = 0$ $\qquad$ $x - 3y + c_2 = 0$

$P(2;-1)$: $\underline{3x + y - 5 = 0}$ $\qquad$ $\underline{x - 3y - 5 = 0}$

Deuxième méthode:

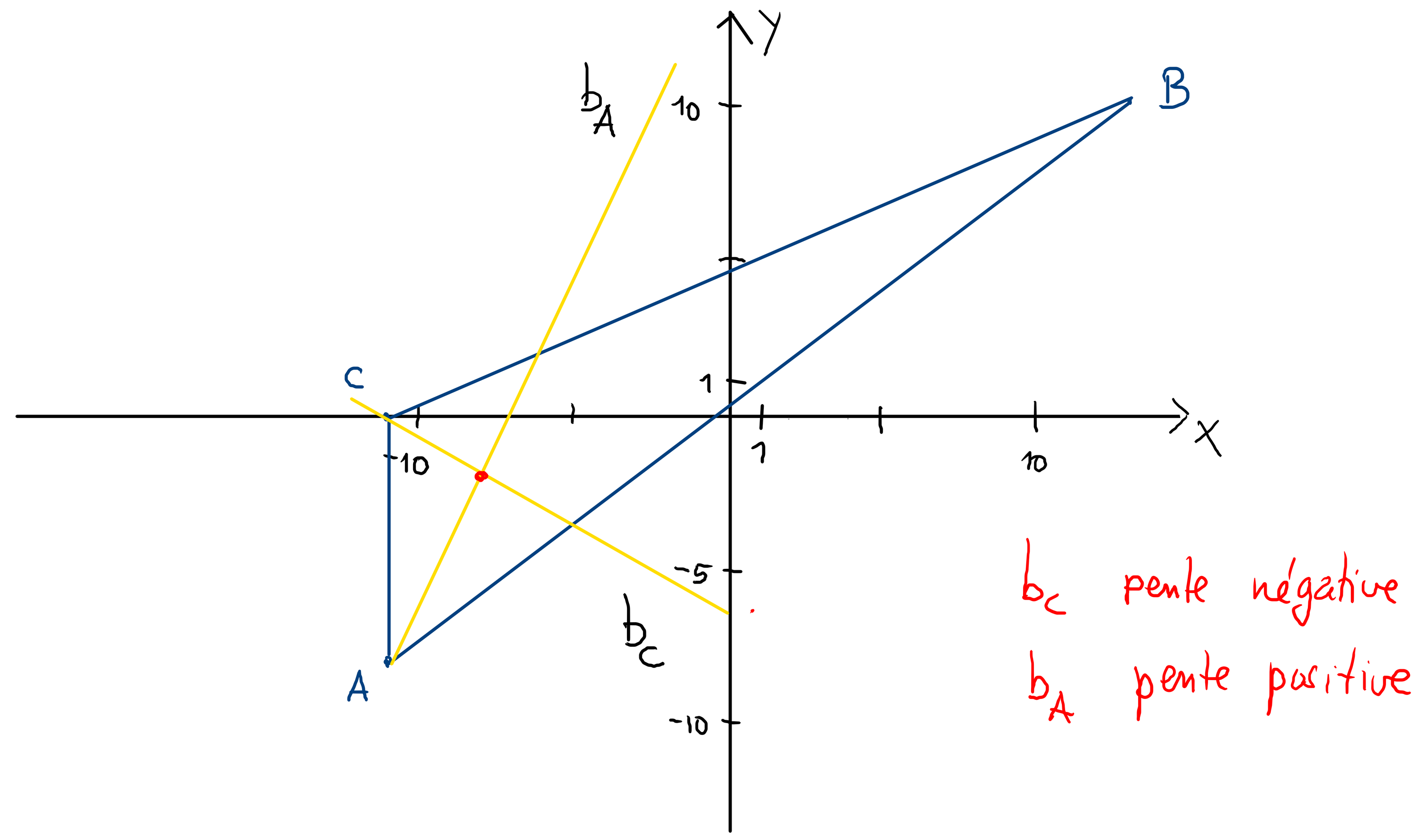
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{d_1} + \vec{d_2}} \ ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{d_1} - \vec{d_2}}$$

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \ \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$


bissectrice
P

Exercice

Soit le triangle de sommets $A(-11;-8)$, $B(13;10)$ et $C(-11;0)$.
Déterminer le centre et le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.



1) Equation cartésienne des droites AB, BC, CA :

$$(AB):\ \frac{y+8}{x+11} = \frac{10+8}{13+11} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$A(-11;-8)$, $B(13;10)$ et $C(-11;0)$

$$3(x+11) = 4(y+8)$$

$$(AB):\ 3x-4y+1=0$$

$$(AC):\ x=-11 \Rightarrow (AC):\ x+11=0$$

$$(BC):\ 10x-24y+110=0 \Rightarrow (BC):\ 5x-12y+55=0$$

2) Equation de deux bissectrices :

Bissectrice intérieure issue de A : $\frac{x+11}{1} = \pm \frac{3x-4y+1}{5}$

calculs ... (b_A): $2x-y+14=0$

Bissectrice intérieure issue de C : $\frac{x+11}{1} = \pm \frac{5x-12y+55}{13}$

calculs ... (b_C) : $2x+3y+22=0$

3) Centre du cercle inscrit

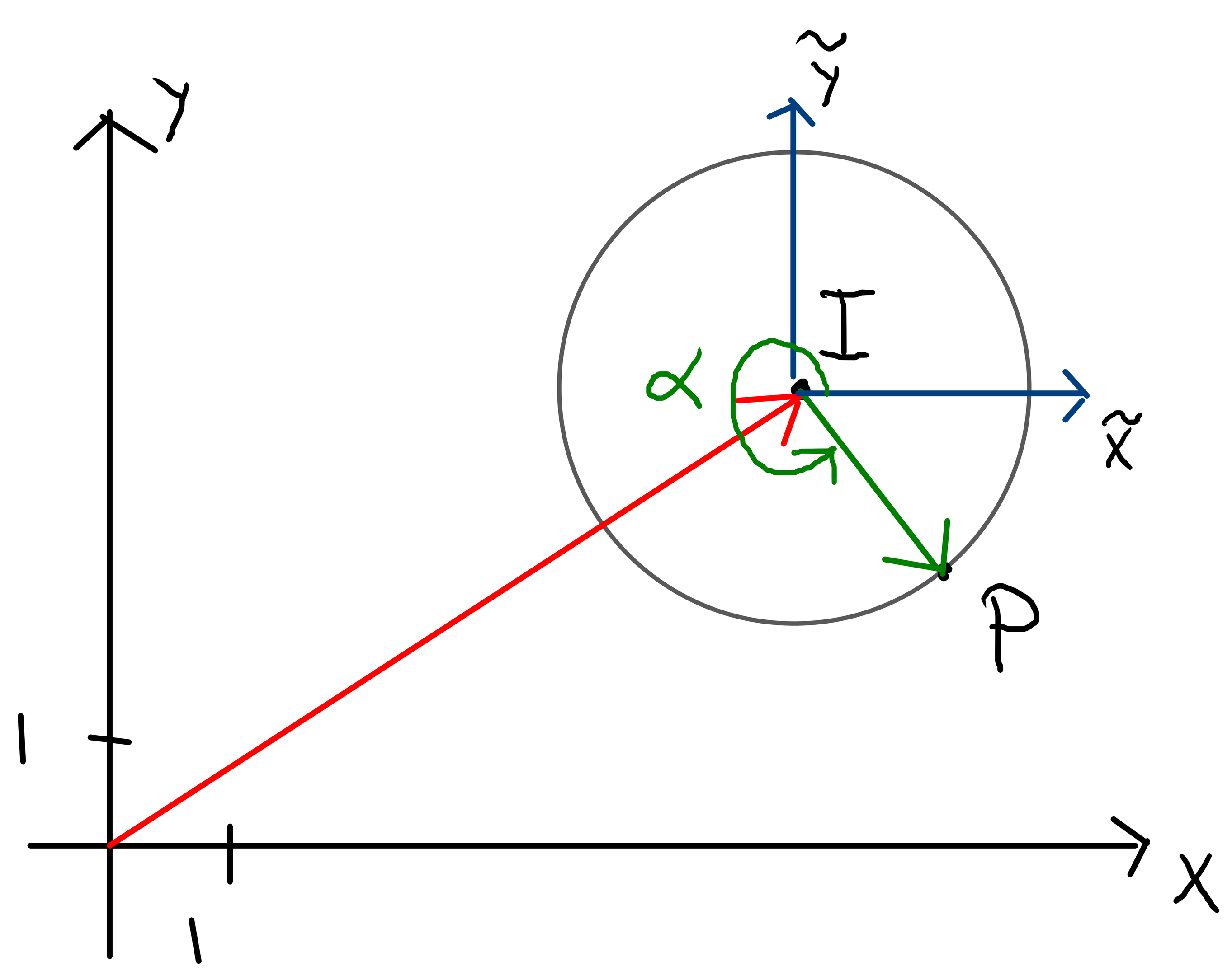
$$\begin{cases} 2x-y=-14 \\ 2x+3y=-22 \end{cases} \begin{array}{c|c} x & y \\ \cdot(-1) & \cdot 3 \\ \cdot 1 & \cdot 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-8 \\ 8x=-64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$I(-8\,;-2)$$

4) Rayon du cercle

$$\delta(I, AC) = 3 = \frac{|-8+11|}{1}$$

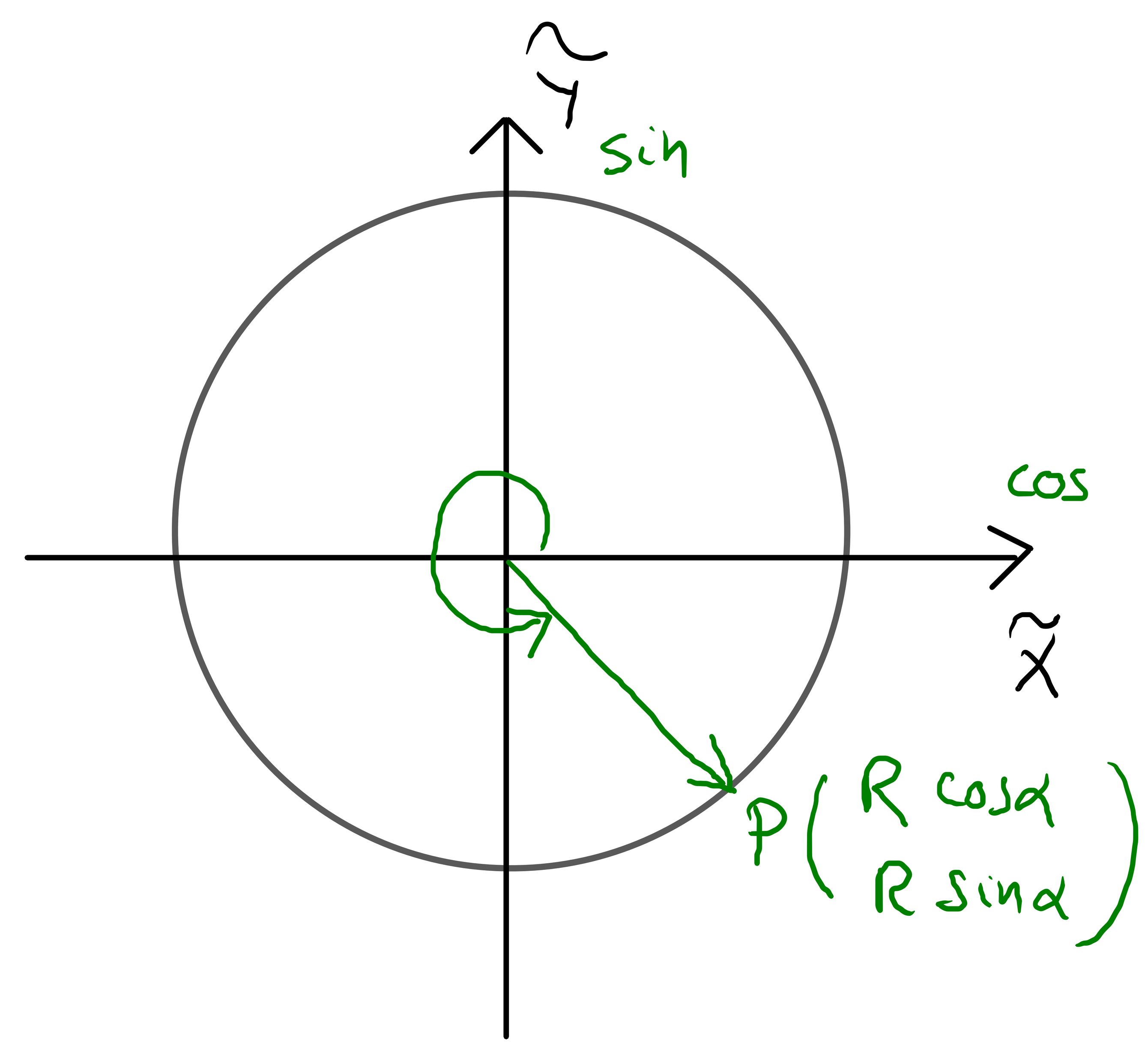
Le cercle



Soit γ le cercle de centre $I(c_1, c_2)$ et de rayon R.

Déterminons une équation paramétrique de γ

$0 \leq \alpha < 2\pi$



Soit $P \in \gamma$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IP} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$(\gamma) : \begin{cases} x = c_1 + R\cos\alpha \\ y = c_2 + R\sin\alpha \end{cases} \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - c_1 = R\cos\alpha \\ y - c_2 = R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (x-c_1)^2 &= R^2\cos^2\alpha \\ + \quad (y-c_2)^2 &= R^2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = R^2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1}$$

$$\boxed{(\gamma) : (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = R^2}$$

équation cartésienne de γ