07.03.24

2.10.5 La concentration $C(t)$, en milligrammes par litre, d'un certain médicament dans le sang d'un patient est donnée par

$$C(t) = \frac{0,16t}{t^2 + 4t + 4}$$

où t désigne le nombre d'heures suivant la prise du médicament. Après combien de temps la concentration est-elle maximale ?

$t \geq 0$, déterminer t tel que $C(t)$ ~~est~~ max.

Calculons sa dérivée : $\frac{d}{dt} C(t) = C'(t)$

$u = 0,16t$; $u' = 0,16$

$v = t^2 + 4t + 4$; $v' = 2t + 4$

$$C'(t) = \frac{0,16(t^2+4t+4) - 0,16t(2t+4)}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{0,16\left[t^2+4t+4-2t^2-4t\right]}{(t^2+4t+4)^2}$$

$$= \frac{0,16(-t^2+4)}{(t+2)^4} = \frac{0,16(2-t)\cancel{(2+t)}^{1}}{(t+2)^{\cancel{4}\,3}} = 0,16\,\frac{-t+2}{(t+2)^3}$$

tableau de la croissance de $C(t)$:

t	-2	0		2	
$C'(t)$			$+$	0	$-$
$C(t)$		$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$

min $(0 ; 0)$

max $(2 ; 0,02)$

$$C(2) = \frac{0,16 \cdot 2}{4+8+4} = \frac{0,32}{16} = 0,02 \left[\text{mg}/\ell\right]$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{0,16t}{t^2+4t+4} = 0$$

2.10.6 Déterminer $k \in \mathbb{R}^*$ de telle sorte que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+k}$ admette un extremum dont l'ordonnée est égale à 8. Préciser ses coordonnées, sa nature (minimum ou maximum) et son type (global ou local).

1

$$f_K(x) = \frac{x^2}{x+K} \qquad ED(f_K) = \mathbb{R} - \{-K\} \quad , \quad \underline{K > 0}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+K) - x^2}{(x+K)^2} = \frac{x^2 + 2Kx}{(x+K)^2} = \frac{x(x+2K)}{(x+K)^2}$$

<u>Tableau de la croissance</u>

x		$-2K$		$-K$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$	||	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

$-K$ p
$-2K$ i
0 i

max $(-2K, -4K)$
min $(0, 0)$

$$f(-2K) = \frac{(-2K)^2}{-2K+K} = \frac{4K^2}{-K} = -4K$$

$$f(0) = \frac{0}{K} = 0$$

Pour que l'ordonnée de l'extrema soit égal à 8, on doit avoir

$$-4K = 8$$
$$K = -2$$ ne convient pas !

(2) Soit à présent $K < 0$

Tableau de la croissance

x		0		$-K$		$-2K$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{max}$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\boxed{min}$	$\nearrow$

$K < 0$

$f(-2K) = -4K \quad \Rightarrow \quad -4K = 8 \quad \Rightarrow \quad \underline{K = -2}$

$f(0) = 0 \neq 8$

Nous avons $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

$\left[\begin{array}{l} \max\ (0,0) \\ \min\ (4\ ;\ 8) \end{array}\right.$ local

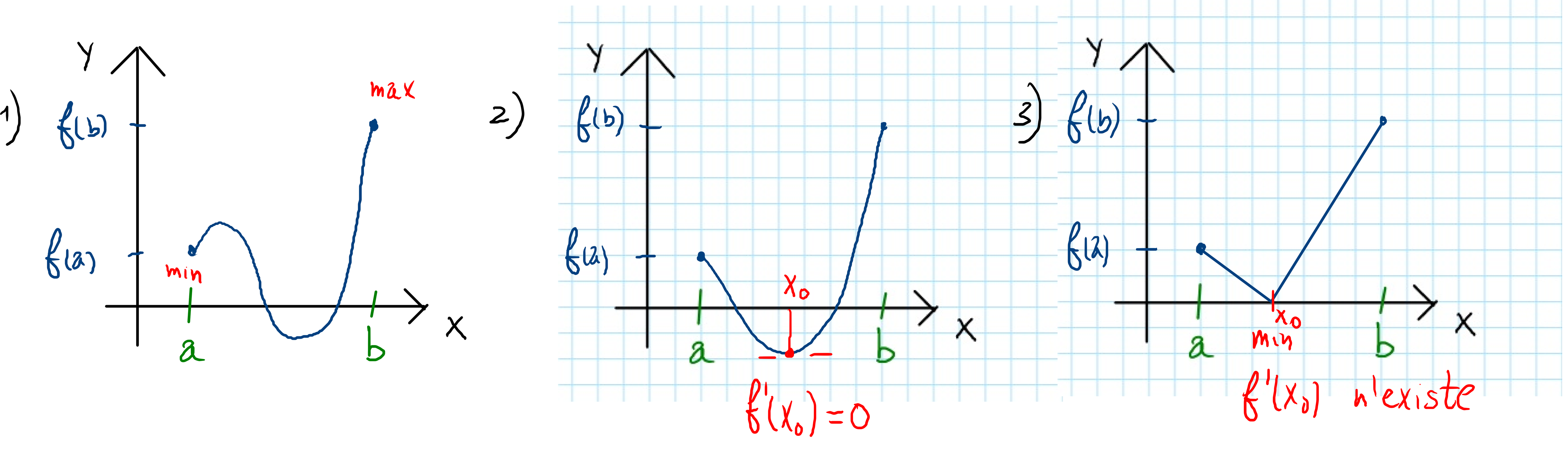
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f'(x_0)$ existe.

Si $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 un point stationnaire de f.

Recherche des points où une fonction atteint ses extrema

1) aux bornes de son ensemble de définition : a, b
2) aux points stationnaires de f
3) les points de l'intervalle $[a,b]$ qui n'appartiennent pas à $ED(f')$.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur $I =]a,b[$

$x_0 \in I$ est un extremum local $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0