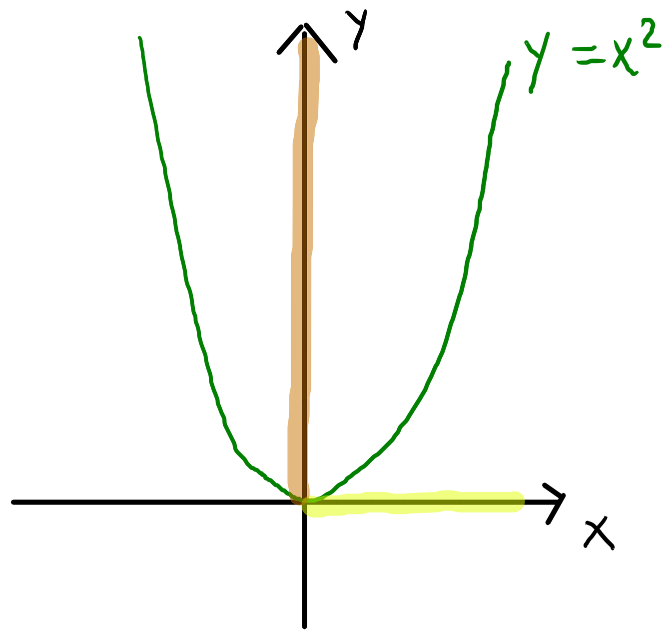
10.11.23

2.4.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + x - 6$
c) $f(x) = -x^2 + 4x$

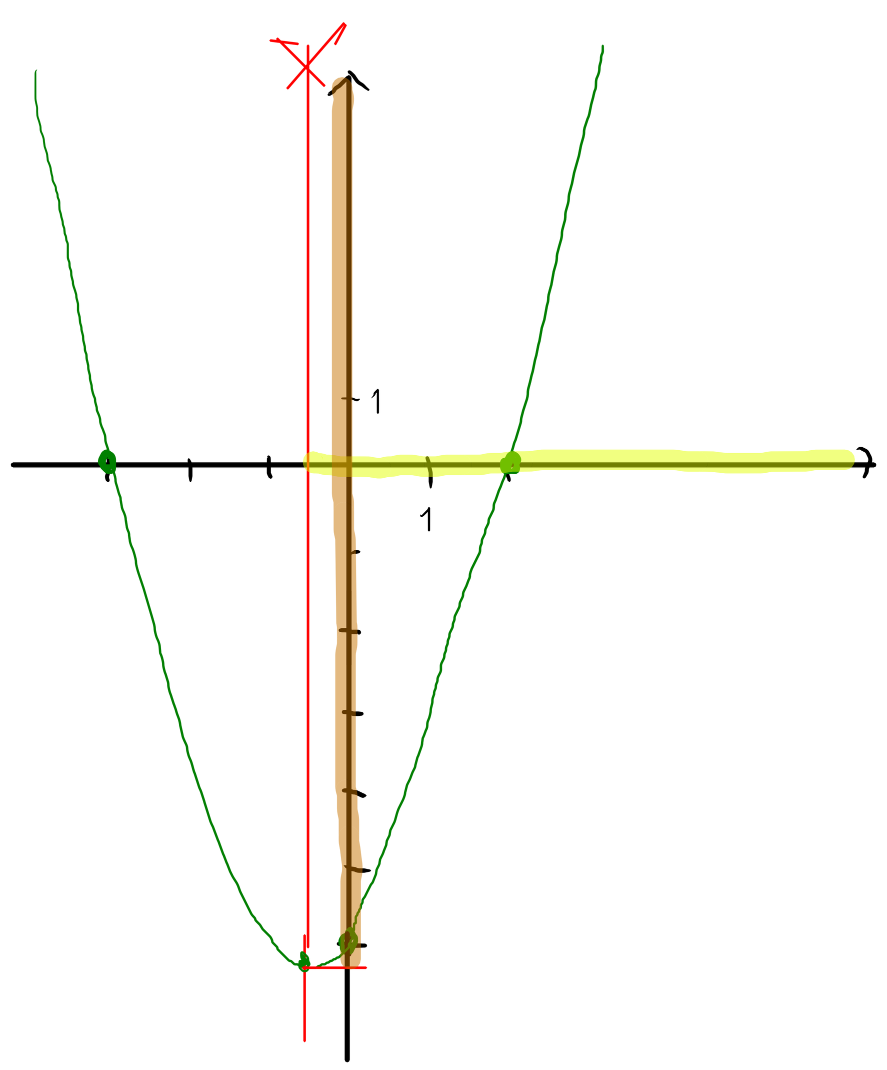


a) $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow [0 ; +\infty[$

$f^r : [0 ; +\infty[\longrightarrow [0 ; +\infty[$
$\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

b) $f(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$



$\cancel{x}$: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1-2-24}{4}$

$S(-\frac{1}{2} ;$ $\qquad = \frac{-25}{4} \cong -6{,}25$

$f : [-\frac{1}{2} ; +\infty[\longrightarrow [\frac{-25}{4} ; +\infty[$
$\quad x \longmapsto x^2 + x - 6$

$$\boxed{\begin{aligned} f^r : [\tfrac{-25}{4} ; +\infty[&\longrightarrow [-\tfrac{1}{2} ; +\infty[\\ x &\longmapsto \sqrt{x + \tfrac{25}{4}} - \tfrac{1}{2} \end{aligned}}$$

$3 \xmapsto{f} 6 \xmapsto{f^r} 3$

déterminons l'application réciproque :

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= y \quad \Big| +6 \\ x^2 + x + \tfrac{1}{4} &= y + 6 + \tfrac{1}{4} \\ (x + \tfrac{1}{2})^2 &= \underbrace{y + \tfrac{25}{4}}_{\geqslant 0} \\ x + \tfrac{1}{2} &= \sqrt{y + \tfrac{25}{4}} \\ x &= \sqrt{y + \tfrac{25}{4}} - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Vérification : $f^r(6) = \sqrt{6 + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{24}{4} + \frac{25}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Ensemble borné

Soit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$

1) $S = [1; 4]$

2) $S = [1; 4[$

3) $S = \{1; 2; 3; 10\}$

4) $S = [1; 4[\cup [6; 8]$

a) $m \in S$ est un minimum si $\forall x \in S$, $m \leq x$.

b) $M \in S$ est un maximum si $\forall x \in S$, $M \geq x$.

c) $a \in \mathbb{R}$ est un minorant si $\forall x \in S$, $a \leq x$

d) $b \in \mathbb{R}$ est un majorant si $\forall x \in S$, $b \geq x$

1)	$m = 1$	$M = 4$	$a \in]-\infty; 1]$	$b \in [4; +\infty[$
2)	$m = 1$	M n'existe pas	$a \in]-\infty; 1]$	$b \in [4; +\infty[$
3)	$m = 1$	$M = 10$	$a \in]-\infty, 1]$	$b \in [10; +\infty[$
4)	$m = 1$	$M = 8$	$a \in]-\infty; 1]$	$b \in [8; +\infty[$