17.11.23

2.5.4 Les suites ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées, croissantes, décroissantes ?

a) $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, avec $n \geq 1$ b) $b_n = -n!$, avec $n \geq 1$

$7! = 7 \cdot 6!$

b) $(\underbrace{-1}_{b_1}, \underbrace{-2}_{b_2}, \underbrace{-6}_{b_3}, \underbrace{-24}_{b_4}, \ldots)$

- minorée : non
- majorée : -1

non bornée

- $b_{n+1} - b_n = \underbrace{-(n+1)!}_{b_{n+1}} - \underbrace{(-n!)}_{b_n} = -(n+1) \cdot n! + 1 \cdot n! = n! \left(-(n+1) + 1\right)$

$= n! \cdot (-n) = -n \cdot n! < 0 \quad , \forall n \geq 1$

Cette suite est strictement décroissante

d) $d_n = \frac{n}{n^2+10}$, avec $n \geq 3$

$$(d_n) = \left(\frac{3}{19}, \frac{2}{13}, \frac{1}{7}, \frac{3}{23}, \dots \right)$$

$b_3 \quad b_4 \quad b_5$

- minorée : 0
- majorée : 1 , $n \geq 3$

bornée

En effet. $$\frac{n}{n^2+10} = \frac{\cancel{n}^{1}}{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{10}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\underbrace{\left(1+\frac{10}{n^2}\right)}_{>1}} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} < 1$$

$$d_{n+1} - d_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+10} - \frac{n}{n^2+10} = \frac{n+1}{n^2+2n+11} - \frac{n}{n^2+10}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+10) - n(n^2+2n+11)}{(n^2+2n+11)(n^2+10)} = \frac{n^3+n^2+10n+10-n^3-2n^2-11n}{(n^2+2n+11)(n^2+10)}$$

$$= \frac{-n^2-n+10}{\underbrace{(n^2+2n+11)}_{>0}\underbrace{(n^2+10)}_{>0}} < 0 \quad , \text{ pour } n \geq 3$$

$\Delta < 0$:

Le numérateur est toujours négatif ; en effet :

$$-n^2-n+10 = -(n^2+n-10) < 0 \quad \text{si } n \geq 3$$

Les zéros de $-n^2-n+10 = 0$ $\quad \frac{1-\sqrt{41}}{-2} \cong 2{,}7 < 3$ (le n du début

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+40}}{-2} = \begin{cases} \\ - \end{cases}$$ impossible

e) $e_n = 3^{1+(-1)^n}$, avec $n \geq 1$

$$(e_n) = (1, 9, 1, 9, \ldots)$$

$$e_n = \begin{cases} 1 & \text{, si } n \text{ est impair} \\ 9 & \text{, si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

bornée, ni décroissante ou croissante.

f) $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = 1 + 2f_n \text{ , si } n \geq 1 \end{cases}$

$$(f_n) = (\underset{f_1}{1}, \underset{f_2}{3}, \underset{f_3}{7}, \underset{f_4}{15}, \underset{f_5}{31}, \ldots)$$

- minorée : par f_1
- majorée : non

} pas bornée

Il semble que (f_n) soit croissante. Démontrons-le.

$$\boxed{\text{Soit la relation } P(n) : f_n - f_{n-1} > 0 \text{ , pour } n \geq 2}$$

Démontrons que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 1$ par récurrence.

1°) Vrai pour $P(1)$ $f_2 - f_1 = 3 - 1 = 2 > 0$

2°) Vrai pour $P(n) \Longrightarrow$ Vrai pour $P(n+1)$. Supposons que $f_n - f_{n-1} > 0$

$$f_{n+1} - f_n = \underbrace{(1 + 2f_n)}_{f_{n+1}} - \underbrace{(1 + 2f_{n-1})}_{f_n} = 2(f_n - f_{n-1}) > 0$$

Donc la suite est croissante.

En fait $f_n = 2^n - 1$. Démontrons-le par récurrence.

1°) $n = 1$, $f_1 = 2^1 - 1 = 1$

2°) $f_n = 2^n - 1 \Rightarrow f_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$f_{n+1} = 1 + 2f_n = 1 + 2(2^n - 1) = 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1$$