2.8.2 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par :

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - x \right) \underset{\text{"} +\infty - \infty \text{"}}{\overset{FI}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} - x \right)\left(x\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x \right)}{x\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{x}{x+1}\right) - x^2}{x\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{x+1} - 1\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\,\frac{x-(x+1)}{x+1}}{\sqrt{\frac{\cancel{x}\ 1}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \frac{-1}{x+1}}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-x}{x+1}}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\cancel{x}\cdot(-1)}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}}{\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} + 1} = \frac{-\frac{1}{1}}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Donc AOD $y = x - \frac{1}{2}$

On a la même AOG : $y = x - \frac{1}{2}$

$ED(f) = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left[0 ; +\infty\right[$

Déterminons l'intersection entre la courbe et son AO :

$$x\sqrt{\frac{x}{x+1}} = x - \frac{1}{2} \qquad \Big|\ (\ )^2 \quad x \in ED(f)$$

$$x^2\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$x^2 \cdot x = (x+1)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$$

$$x^3 = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}x + x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{3}$$, ne convient pas !

Aucune intersection