20.09.23

Puissances

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$

$\boxed{a^m}$ exposant

base

Propriétés

1) $a^1 = a$

2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Conséquences

4) $a^n \cdot \underbrace{a^0}_{\text{élément neutre de la multiplication}} \overset{2)}{=} a^{n+0} = a^n \Rightarrow \underline{a^0 = 1}$, $a \neq 0$

5) $a^n \cdot \underbrace{a^{-n}}_{\text{inverse de } a^n} \underset{2)}{=} a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$

Donc $\underline{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

(⚠ La puissance négative n'a rien à voir avec le signe de a)

6) $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} \underset{3)}{=} a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Donc $\underline{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

4.1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$

b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$

c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10}$

e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$

f) $\dfrac{5^8}{5^6}$

g) $\dfrac{5^6}{5^8}$

h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$

i) $\dfrac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

b) $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

2) $(x^n)^m = x^{n \cdot m} = (x^m)^n$. Ex $(x^3)^4 = (x^4)^3$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

4.1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3 = 2^6$

b) $2^{(2^3)} = 2^8$

c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6$

e) $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$

$= 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{15}$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$

$= \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{1}} \cdot \frac{\cancel{8}^{2}}{3^{\cancel{2}}}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

i) $\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}} = \frac{(3^{1+2+3+4})^5}{3^{50}} = 1$

4.1.5 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

i) $$\frac{128 \cdot 10 \cdot 5^7 \cdot 5^3}{(5^{-1} \cdot 5^2)^3} = \frac{256 \cdot 5 \cdot 5^7 \cdot \cancel{5^3}^{\,1}}{\cancel{5^3}_{\,1}} = \frac{2^8 \cdot 5^8}{1} = 10^8$$

4.1.6 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^3$ d) $\frac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \frac{x^7}{(y^3)^4}$

c) $\frac{4\cancel{r^6}}{\cancel{s^2}} \cdot \frac{\cancel{s^3}}{\cancel{r^3}} = \frac{4\ r^3\ s}{1} = 4r^3s$

d) $\frac{\cancel{2^{10}}\ \cancel{x^{10}}\ \cancel{y^{15}}}{\cancel{2^3}\ \cancel{x^3}\ \cancel{y^3}} \cdot \frac{\cancel{y^{12}}}{\cancel{x^7}} = \frac{2^7\ y^{24}}{1} = 2^7y^{24}$

e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ g) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$

f) $\frac{\cancel{8}x^3\ y^{-5}}{\cancel{4}x^{-1}\ y^2} = \frac{2\ x^4}{1\ y^7} = 2x^4y^{-7}$

g) $\frac{x^{-2}}{3^{-2}} \cdot \frac{x^3}{9^3} = \frac{x}{3^{-2}\cdot 3^6} = x \cdot 3^{-4} = 3^{-4}x$