20.12.23

2.6.8 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\sin(2x)}{2x} = 2 \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}}$

$= 2 \cdot 1 = 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}}$

$= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}} = 1$

b) $\frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{3}{2} \left(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}_{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \right)$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}}_{1}} = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5\cdot 4 \cdot \frac{x}{4}} = \frac{1}{20} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}}_{1} = \frac{1}{20}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(7x)}{\sin(3x)} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\cos(7x)\cdot\sin(3x)}$

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(7x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{1}{\cos(7x)} \right) = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(7x)}}_{1}$

$= \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

$t = x - 1$

$x = t + 1$

x	t
1	0

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1-\cos^2(x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{1-\cos(x)}}}{\underset{1}{\cancel{(1-\cos(x))}}(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-\sin(t)}{t} = -1$

$t = x - \frac{\pi}{2}$

$x = t + \frac{\pi}{2}$

x	t
$\frac{\pi}{2}$	0

CRM pg 30

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin(\alpha)$

Changement de variable

2.6.9 En amplifiant chaque fraction par $\cos(x)+1$, montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right)$$

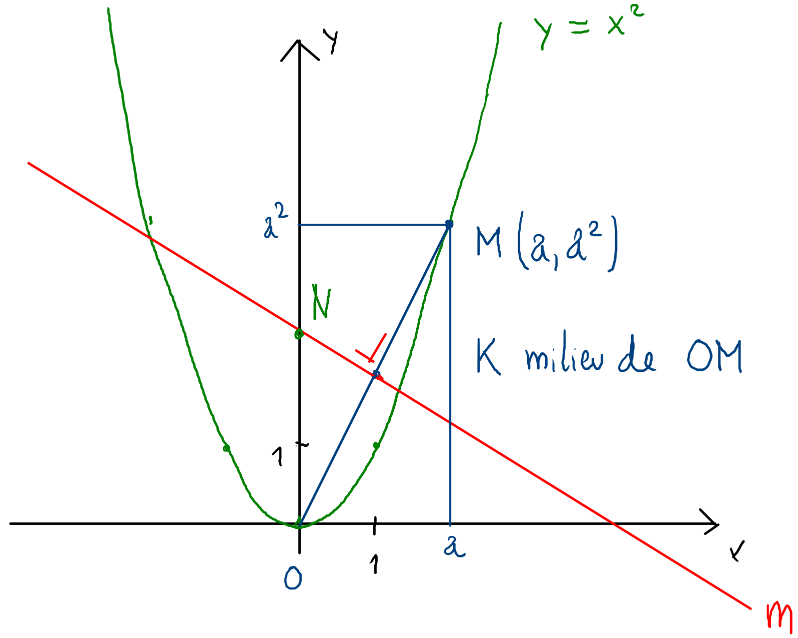
est défini au voisinage de 0

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x\cdot(\cos(x)+1)} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Ind}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x(\cos(x)+1)}$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}}_{\to 0} = -1\cdot 0 = 0$$

2.6.11 – 2.6.12

2.6.11 On donne la parabole d'équation $y = x^2$. Pour tout point M de la courbe (distinct de l'origine O), on trace la médiatrice du segment $[OM]$. Celle-ci coupe l'axe des ordonnées en un point N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée du point N lorsque le point M tend vers O ?



$a \neq 0$

1) Coordonnées du point K : $K\left(\frac{a}{2} ; \frac{a^2}{2}\right)$

2) Equation de m

3) Coordonnées de N

2) Equation de OM : $y = a x$

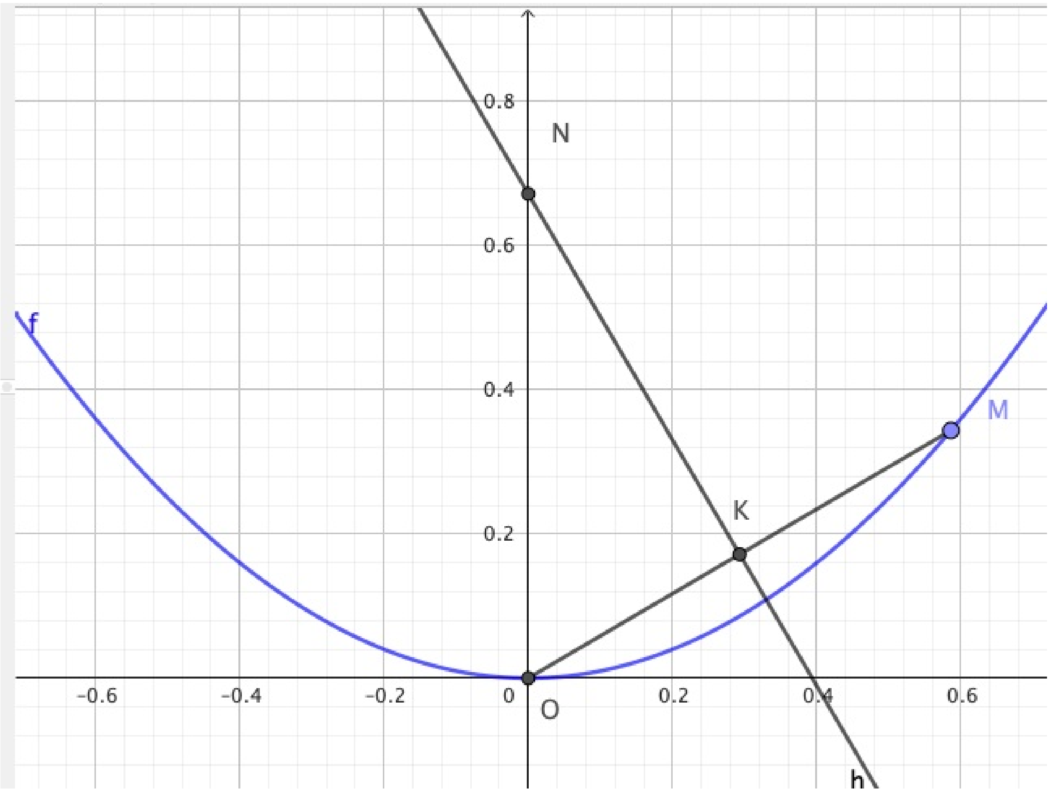
Equation de m : $y = \frac{-1}{a} x + h$

m passe par le point K : $\frac{a^2}{2} = \frac{-1}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{2} + h \Rightarrow h = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}$

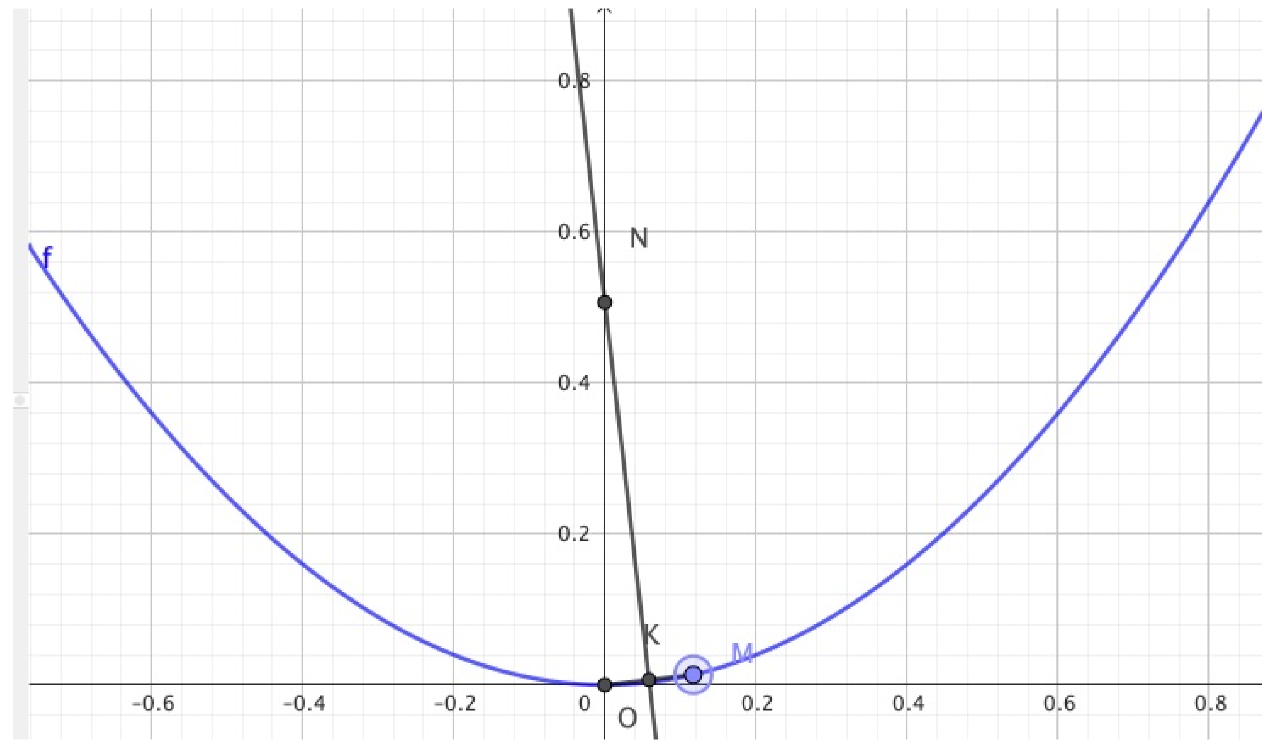
$m : y = \frac{-1}{a} x + \underbrace{\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{ordonnée à l'origine}}$

3) $N\left(0 ; \frac{a^2+1}{2}\right)$

Si $M \to O$, alors $a \to 0$, donc $N \to \left(0 ; \frac{1}{2}\right)$



0.8
N
0.6
f
0.4
M
K
0.2
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
O
h



0.8
0.6
N
f
0.4
0.2
K
M
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
O