

Série 1 Arithmétique modulaire

Exercice 1

$$\begin{array}{l} a) \quad 88 = 8 \cdot 11 = 2^3 \cdot 11 \\ \quad \quad 63 = 7 \cdot 9 = 7 \cdot 3^2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 88 \\ 63 \end{array}} \right\} \text{pgdc}(88, 63) = 1$$

b)

Ligne	reste	$\cdot a$	$\cdot b$	q
1	88	1	0	
2	63	0	1	
3	25	1	-1	1
4	13	-2	3	2
5	12	3	-4	1
6	1	-5	7	1

$$\begin{array}{l} -5 \cdot 88 + 7 \cdot 63 = 1 \\ \downarrow \cdot 2 \quad \downarrow \cdot 2 \quad \downarrow \cdot 2 \end{array}$$

c) $-10 \cdot 88 + 14 \cdot 63 = 2$

Exercice 2

Ligne	reste	$\cdot a$	$\cdot b$	q
1	936	1	0	
2	275	0	1	
3	111	1	-3	3
4	53	-2	7	2
5	5	5	-17	2
6	3	-52	177	10
7	2	57	-194	1
8	1	-109	371	1

$$\underline{-109 \cdot 936 + 371 \cdot 275 = 1}$$

Exercice 3

$$18 \cdot 9303 - 55 \cdot 2717 = 19$$

Exercice 4

$$25 \cdot 18480 - 47 \cdot 9828 = 84$$

Exercice 5

$$-7 \cdot 42 + 2 \cdot 150 = 6 \quad \stackrel{\cdot 3}{\Rightarrow} \quad \underline{-21 \cdot 42 + 6 \cdot 150 = 18}$$

$$\text{pgdc}(42, 150) = 6$$

Exercise 7

Calculer $87^n \pmod{111}$.

n	1	2	4	8	16	32	64
87^n	87	21	108	9	81	12	33

Calculer 87^{30} , 87^{63} et $87^{100} \pmod{111}$.

$$87^1 \equiv 87 \pmod{111}$$

$$87^2 \equiv 7562 \equiv 21$$

$$87^4 \equiv 21^2 \equiv 441 \equiv 108$$

$$87^8 \equiv 108^2 \equiv 11'664 \equiv 9$$

$$87^{16} \equiv 9^2 \equiv 81$$

$$87^{32} \equiv 81^2 \equiv 6561 \equiv 12$$

$$87^{64} \equiv 12^2 \equiv 144 \equiv 33 \pmod{111}$$

$$\bullet 87^{30} \equiv 87^{16+8+4+2} \equiv 81 \cdot 9 \cdot 108 \cdot 21 \equiv 1653372 \equiv 27 \pmod{111}$$

$$\bullet 87^{63} \equiv 87^{32+16+8+4+2+1} \equiv 12 \cdot 81 \cdot 9 \cdot 108 \cdot 21 \cdot 87 \equiv 105 \pmod{111}$$

$$\equiv 87^{30} \cdot 87^{30} \cdot 87^3 \equiv 27^2 \cdot 87^2 \cdot 87 \equiv 729 \cdot 21 \cdot 87 \equiv 105 \pmod{111}$$

$$\bullet 87^{100} \equiv 87^{64} \cdot 87^{32} \cdot 87^4 \equiv 33 \cdot 12 \cdot 108 \equiv 33$$