Série 1 – Arithmétique modulaire

Exercice 1

a) Montrer que 88 et 63 sont premiers entre eux.

b) Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $88\,u + 63\,v = 1$.

c) En déduire un couple (x, y) de nombres entiers relatifs solution de l'équation diophantienne $88\,x + 63\,y = 2$.

Exercice 2

Déterminer un couple de nombre entier relatifs (u, v) tel que $936\,u + 275\,v = 1$.

Exercice 3

Calculer le pgdc de 8303 et 2717 et donner l'identité de Bézout correspondante.

Exercice 4

Calculer par l'algorithme d'Euclide $\text{pgdc}(18480, 9828)$.
Donner le couple de nombre entier relatifs (u, v) tel que $18480\,u+9828\,v = \text{pgdc}(18480, 9828)$.

Exercice 5

Déterminer toutes les solutions entières de $42\,x + 150\,y = 18$.

Exercice 6 (Python : algorithme d'Euclide étendu)

On utilise l'égalité déjà calculée $18480\,u + 9828\,v = \text{pgdc}(18480, 9828)$.
On pose : `L1 = [18480, 1, 0]` et `L2 = [9828, 0, 1]`
Puis `L1` et `L2` deviennent :

```
L1 = L2[:]
q = L1[0]//L2[0]
et L2[0]= L1[0] - q * L2[0], L2[1]= L1[1] - q * L2[1], L2[2]= L1[2] - q * L2[2]
L2 = [8652, 1, -1]
```

et ainsi de suite.
Programmer en python cet algorithme.
Le programme peut retourner

```
[18480, 1, 0]
[9828, 0, 1]
[8652, 1, -1]
[1176, -1, 2]
[420, 8, -15]
[336, -17, 32]
[84, 25, -47]
```

Exercice 7

Calculer $87^n \pmod{111}$.

n	1	2	4	8	16	32	64
87^n							

Calculer 87^{30}, 87^{63} et $87^{100} \pmod{111}$.

Exercice 8

Programmer en Python l'exponentiation modulaire.

Par exemple `expo_mod(87, 32, 111)` retourne `12`.