Série 2 – Méthodes numériques

Exercice 1

Utiliser la Règle des signes de Descartes pour trouver le nombre possible de solutions positives et négatives.

a) $x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 4 = 0$

b) $2\,x^4 - x^3 + 4\,x^2 - 5\,x + 1 = 0$

Exercice 2

a) Séparer les racines réelles de l'équation $x^4 + x - 1 = 0$

b) Déterminer par la méthode de la bissection une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

Exercice 3

Effectuer trois itérations de la méthode de la bissection pour calculer la racine de l'équation $f(x) = 0$ sur les intervalles indiqués pour les fonctions données.

a) $f(x) = 1 - x \cdot e^x$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

b) $f(x) = x^5 - x - 1$ dans l'intervalle $[0.9\,;\,1.2]$

Le critère de Descartes

Exemples :

1) $P_A(x) = 8x^6 - 7x^2 - 5x - 6$

$V = 1 \Rightarrow n_p = 1$

$P_A(-x) = 8x^6 - 7x^2 + 5x - 6$

$V = 3 \Rightarrow n_n = 1$ ou 3

zéros réels +	zéros réels −	zéros complexes	zéros
1	1	4	6
1	3	2	6

2) $P_B(x) = 4x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$

$V = 5 \Rightarrow n_p = 1, 3$ ou 5

$P_B(-x) = -4x^7 - 6x^6 - 9x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 4x - 3$

$V = 2 \Rightarrow n_n = 2$ ou 0

$z_{\mathbb{R}+}$	$z_{\mathbb{R}-}$	$z_{\mathbb{C}}$	z
1	0	6	7
1	2	4	7
3	0	4	7
3	2	2	7
5	0	2	7
5	2	0	7

Ex 1

a) $\underbrace{x^3 - 3x^2 - 2x + 4}_{P(x)} = 0$; $P(-x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

- $V_p = 2 \Rightarrow n_p = 0$ ou 2
- $V_n = 1 \Rightarrow n_n = 1$

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	z
0	1	2	3
2	1	0	3

b) $2x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$ $P(-x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

$V_p = 4 \Rightarrow n_p = 0, 2$ ou 4

$V_n = 0 \Rightarrow n_n = 0$

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	z
0	0	4	4
2	0	2	4
4	0	0	4

Exercice 2

a) Séparer les racines réelles de l'équation $x^4 + x - 1 = 0$

b) Déterminer par la méthode de la bissection une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

$P(x) = x^4 + x - 1$; $P(-x) = x^4 - x - 1$

$V_p = 1 \Rightarrow n_p = 1$

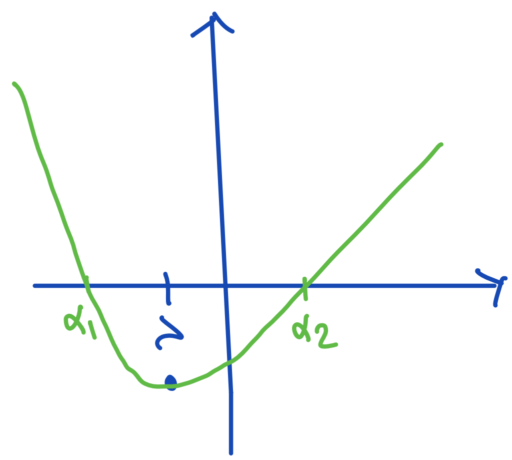
$V_n = 1 \Rightarrow n_n = 1$

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	z
1	1	2	4

$P'(x) = 4x^3 + 1$ $\quad P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \simeq -0.63 = \lambda$

x		-0.63	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-0.63) \simeq -1.47$



$\alpha_1 \in [-2; -1]$

$\alpha_2 \in [0; 1]$

- $f(-2) = 13 > 0$ et $f(-1) = -1 < 0$
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

b) On peut déterminer le nombre d'itérations à faire.

Estimation de l'erreur :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

Donc $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \iff 2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$

$$\iff \boxed{n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(b-a) - \left(\ln(\varepsilon) + \ln(2)\right)}{\ln(2)}$$

$$= \frac{\ln(b-a) - \ln(2\varepsilon)}{\ln(2)}$$

Pour le 1er zéro : $\alpha_1 \in [-2; -1]$

$$n \geq \frac{\ln(-1+2) - \ln(2\cdot 10^{-2})}{\ln(2)} = \frac{-\ln(0{,}02)}{\ln(2)} \simeq 5.64$$

Il faut donc 6 itérations.

i	a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$
0	-2	-1.5	-1	+	+	-	/
1	-1.5	-1.25	-1	+	+	-	0.25
2	-1.25	-1.125	-1	+	-	-	0.125
3	-1.25	-1.1875	-1.125	+	-	-	0.0625
4	-1.25	-1.2187	-1.1875	+	-	-	0.0312
5	-1.25	-1.2343	-1.2187	+	+	-	0.0156
6	-1.2343	-1.2265	-1.2187	+	+	-	0.0078

Pour le 2ème zéro : $\alpha_2 \in [0, 1]$

Il faut aussi 6 itérations.

i	a_i	x_i	b_i	f(a_i)	f(x_i)	f(b_i)	|x_i-x_i-1|
0	0.0000	0.5000	1.0000	-1.0000	-0.4375	1.0000	-
1	0.5000	0.7500	1.0000	-0.4375	0.0664	1.0000	0.2500
2	0.5000	0.6250	0.7500	-0.4375	-0.2224	0.0664	0.1250
3	0.6250	0.6875	0.7500	-0.2224	-0.0891	0.0664	0.0625
4	0.6875	0.7188	0.7500	-0.0891	-0.0144	0.0664	0.0313
5	0.7188	0.7344	0.7500	-0.0144	0.0252	0.0664	0.0156
6	0.7188	0.7266	0.7344	-0.0144	0.0052	0.0252	0.0078

Exercice 3

Effectuer trois itérations de la méthode de la bissection pour calculer la racine de l'équation $f(x) = 0$ sur les intervalles indiqués pour les fonctions données.

a) $f(x) = 1 - x \cdot e^x$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

b) $f(x) = x^5 - x - 1$ dans l'intervalle $[0.9\,;\,1.2]$

a) f est continue sur $[0;1] = I$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 - e^1 \cong -1{,}7 \end{array}\right\} f(0) \cdot f(1) < 0$$

il existe au moins un zéro sur I.

$f'(x) = -e^x - x\,e^x = -e^x(1+x)$

$f'(x) < 0$ sur I, donc f est strictement décroissante sur I $\Rightarrow$ α est unique

Le tableau suivant rassemble les trois premières itérations :

i	a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	0	0.5	1	+	+	-	/
1	0.5	0.75	1	+	-	-	0.25
2	0.5	0.625	0.75	+	-	-	0.125
3	0.5	0.5625	0.625	+	+	-	0.0625

Le nombre d'itérations:

$$n \geq \frac{\log(1-0) - \log(0.002)}{\log 2} \cong 8.9 \Rightarrow n = 9$$

b) $f(x) = x^5 - x - 1$ sur $I = [0.9; 1.2]$

f est continue et différentiable sur I.

$$\left.\begin{aligned} f(0.9) &= -1.30951 \\ f(1.2) &= 0.28832 \end{aligned}\right\} \; f(0.9) \cdot f(1.2) < 0$$

Il existe au moins un zéro sur I.

$$f'(x) = 5x^4 - 1 = 5\left(x^4 - \frac{1}{5}\right) = 5\left(x - \sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)\left(x + \sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)\left(x^2 + \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

$\sqrt[4]{\frac{1}{5}} = \sqrt[4]{0.2} \cong 0.66874 \Rightarrow f'(x) > 0$ sur $I \Rightarrow \alpha$ est unique dans I.

i	a_i	x_i	b_i	f(a_i)	f(x_i)	f(b_i)	|x_i-x_i-1|
0	0.9	1.05	1.2	-1.3095	-0.7737	0.2883	/
1	1.05	1.125	1.2	-0.7737	-0.3230	0.2883	0.0750
2	1.125	1.1625	1.2	-0.3230	-0.0394	0.2883	0.0375
3	1.1625	1.18125	1.2	-0.0394	0.1187	0.2883	0.0187